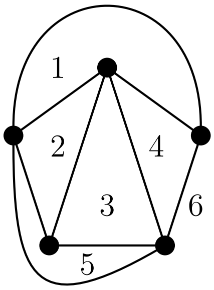
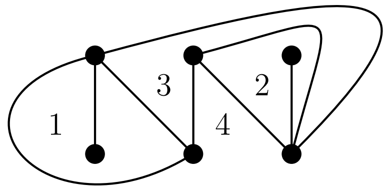
SzA XI/XII. gyakorlat, 2013. november 21/26.
Dualitástól PERTig, hiszen hurrá, megint ZH!

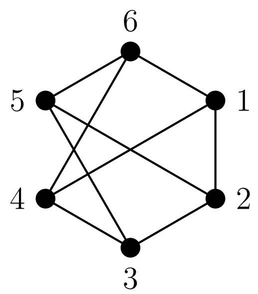
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

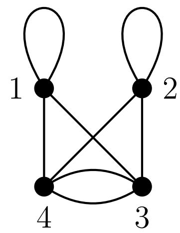
1. **Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!**





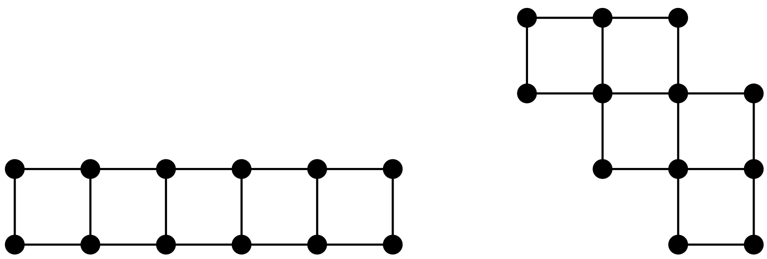
Az ábrán látható. Szorgalmasabbak eleve síkba is rajzolhatják őket.



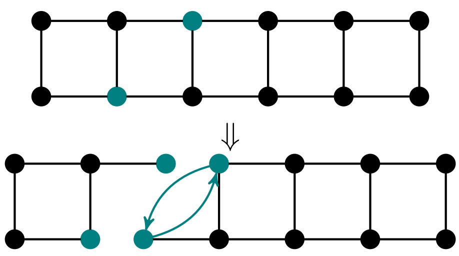


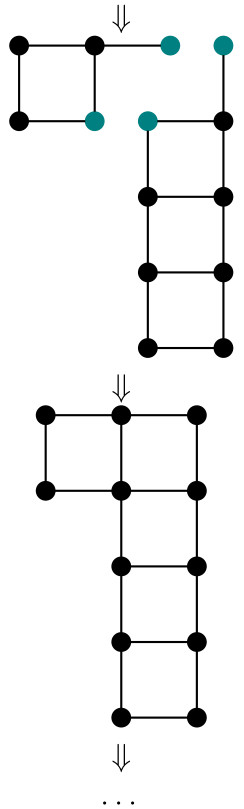
2. **Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?**
A duális pontjainak száma pont G tartományainak számával lesz egyenlő. Az Euler-formula, ami $n+t = e+2$ a feltételek alapján használható, továbbá a regularitás és a fokszámösszegek képlete alapján $3n = 2e$. Innen kiszámolhatjuk, hogy $e = 30$ és $t = 12 = n^*$, ami a megoldás.

3. **Gyengén izomorf-e az alábbi két gráf?**



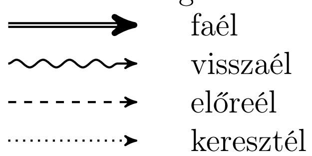
Igen, a Whitney-tételek alapján, a következő típusú lépéseket felhasználva egymásba vihető a kettő:

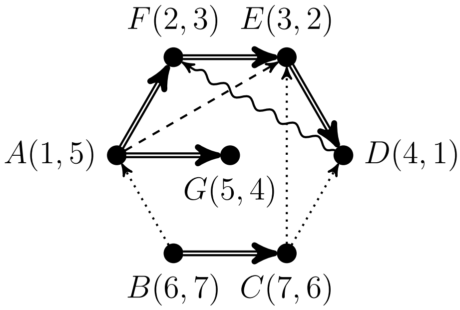




4. **Végezzünk mélységi bejárást a következő gráfon A csúcsból indulva, és osztályozzuk az éleit!**

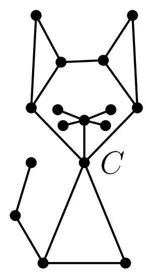
   Lásd az ábrát. A számok (msz, bsz) formában vannak megadva.



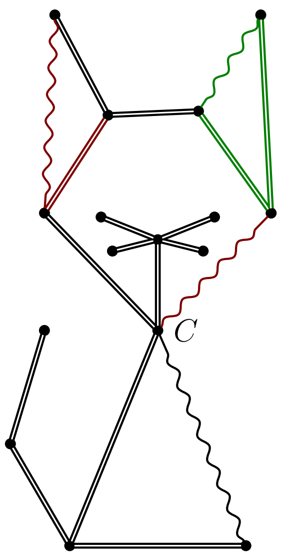


Megjegyzés: mikor elakadtunk, akkor véletlenszrűen választottunk egy még nem bejárt csúcsot, ahonnan folytattuk a bejárást. Az véletlen, hogy ebben a példában keresztélek csak a két fa között mennek, például ha lenne (G, F) élünk, az is keresztél lenne.

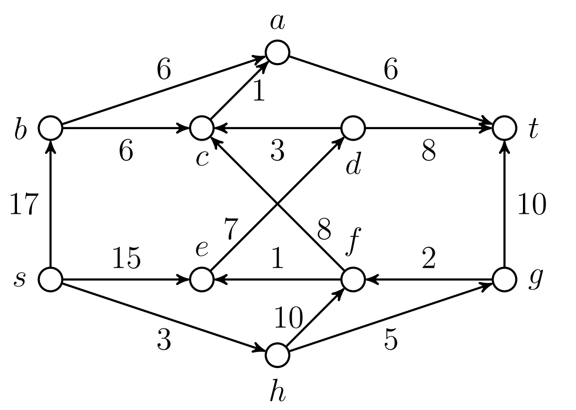
5. **Határozzunk meg egy alapkörrendszert és fundamentális vágásrendszert a következő gráfban úgy, hogy a C pontból indulva készítünk egy mélységi feszítőfát!**



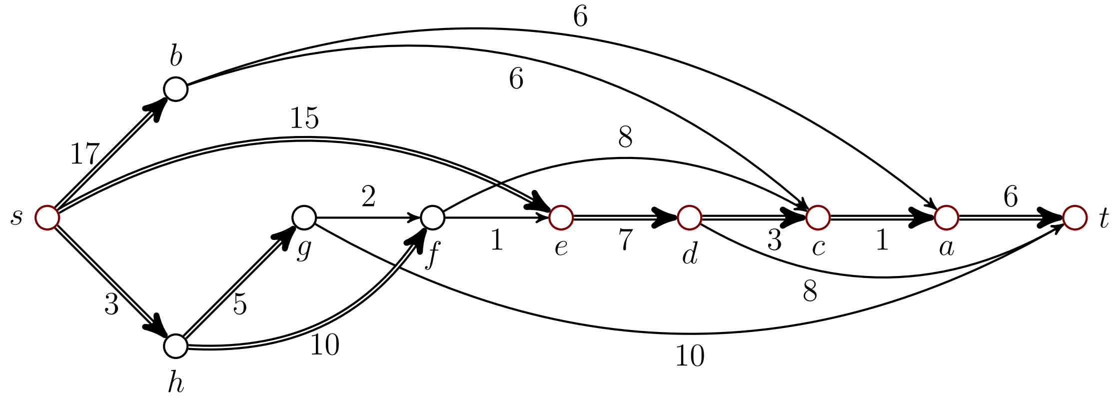
Egy lehetséges bejárás eredménye látható a következő ábrán. Minden egyes visszaél meghatároz egy alapkört, példaként zöldesen megjelölve egy. Az összes alapkör együtt alkotja az alapkörrendszert. Továbbá minden egyes faél meghatároz egy fundamentális vágást (azokkal a visszaélekkel együtt – ha esetleg vannak ilyenek –, akik az adott ágban „mellette" futnak), példaként pirosasan megjelölve egy. Az összes fundamentális vágás együtt alkotja a fundamentális vágásrendszert (ebben a példában egész sok fundamentális vágásunk van).



6. **[ZH 2011. november 24.] Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!**



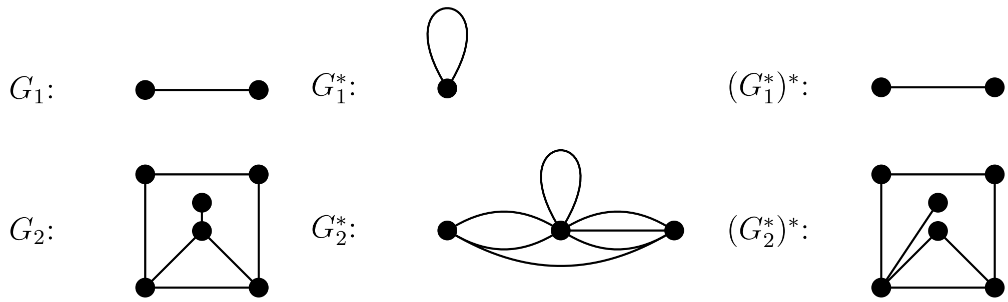
Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét (emeletekre bontással vagy mélységi bejárással, ahogy jólesik). Lásd az ábrát. (2 pont)
Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)
Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont)
és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t. (2 pont)



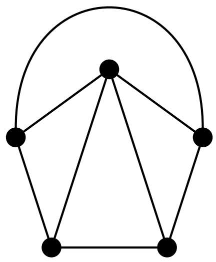
s	b	h	g	f	e	d	c	a	t
0	17	3	8	13	15	22	25	26	32

7. **Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!**
Egy pont, $n-1$ hurokéllel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n-1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

8. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \ncong (G_2^*)^*$!**
Sokfélét lehet rajzolni mindkettőből, két egyszerű példa:



9. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



10. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.**
Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4-nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4-et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jé, tényleg izomorfak.

11. **[ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**
A konvex poliéder élhálója pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n + t - 2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^* d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.

12. **[PZH 2008. december 5] Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.**
Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor

viszont az ehhez tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

13. **[PPZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.**
Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G-nek legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
Ha G-nek legfeljebb 2 csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^*-nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolja ugyanazt a lapot.) (1 pont)
Ha pedig G-nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G-beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n - 12$. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)
Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G-ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^*-beli élek éppen a v-ből induló G-beli éleknek felelnek meg, (3 pont)
ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

Ha vki azt hivatkozza, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n - 6$-os felső becslés alapján jutunk erre, akkor vhogy el kell intézni a legfeljebb 2 csúcsú gráfokat.

14. **G egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**
Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n - 1$ hosszú út (a bejárás során „visszafele” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topolgikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előrefele mutató élet behúzunk (azaz az i csúcsból vezet irányított él minden $i + 1 \ldots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni.

15. **[PZH 2010. ősz] Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű, irányítatlan gráf v_1-ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?**
Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek (*megjegyzés, DM: irányítatlan gráf!*), azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
Ezek szerint G-ben nem futhat él a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ pontok között. (2 pont)
A G gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)
Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)
Ennyi éle pedig lehet is G-nek. Ha ugyanis G pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott F lehet a G mélységi fája. (2 pont)

A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

16. **G síkbarajzolható és van Euler-köre. Bizonyítsuk be, hogy G^* páros gráf!**
Tfh G^* nem páros, ami az ismert tétel alapján azt jelenti, hogy van páratlan hosszú köre. Ez

a kör G-ben egy vágásnak felel meg (a duális tulajdonságai miatt), ami szintén páratlan sok élből áll. Ez viszont lehetetlen, hiszen az Euler-kör ebben az esetben páratlanszor közlekedne a vágás által meghatározott két rész között, pedig párosszor kell neki. Vagyis G^* páros.