SzA I. gyakorlat

2007. szeptember 12.

1. **Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.**
   Tfh nem igaz, vagyis „Nem minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak”. Ezt kicsit átrendezve: „Létezik olyan borg ebben a szobában, akinek nem piros fülei vannak”. Ez nyilván nem igaz, tehát az eredeti állítás igaz.

2. Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)

   (a) **Az osztályban minden tanuló lány.** Az osztályban van fiú.

   (b) **Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).** Bergengóciában van szegény és házas férfi.

   (c) **Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.** Az osztályban minden lány legfeljebb 170 cm magas.

   (d) **Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.** Bergengóciában minden nő szegény vagy nincs gyereke.

3. **Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!**
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad.”
   Van olyan asszony, aki egész életében olyat szeretne tenni, ami szabad.

4. **Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?**
   Tfh q nem igaz, és p igaz. Ha viszont p igaz, akkor q is igaz, ami viszont nem igaz, így ellentmondásra jutottunk. Tehát p nem lehet igaz.

5. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!

   (a) **Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.** Lehet, mert a nem hömöpörőkről nem tudunk semmit.

   (b) **Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.** Hamis, mert a feltételnek ellentmond.

   (c) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.** Hamis, lásd előző feladat.

   (d) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.** Igaz, lásd előző feladat.

   (e) **Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.** Lehet, mert nem mond ellent a tudottaknak, de nem is következik belőlük.

6. Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!

(a) **Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb.** Egy olyan embert, akinek az összes gyereke legfeljebb 10 éves.

(b) **Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb.** Egy olyan embert, akinek van legfeljebb 10 éves gyereke.

(c) **Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb.** Az összes gyerek legalább 10 éves (vagy minden ember minden gyereke legalább 10 éves).

7. **Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.**
$6!/6$. Mondhatjuk azt, hogy ez a cirkuláris permutáció, és azért, de indokolhatjuk úgy is, hogy 1 embert rögzítünk (hozzá viszonyítunk), és az összes többit utána ültetjük le.

8. **Egy 6 házaspárból álló társaság hányféleképpen ültethető le egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek? És egy köralakú asztalhoz?**
$6! \cdot 2^6$, mert a házaspárokat egynek tekintjük, így 6 elem permutációja, az egyes házaspárok önmagukon belüli leültetései pedig 6 db független esemény. Köralakú asztal esetén $6! \cdot 2^6/6$, ugyanolyan megfontolásból, mint az előző feladatban.

9. **Hányféleképpen ültethetünk le n házaspárt egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek?**
$n! \cdot 2^n$, mint az előbb.

10. **Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?**
$10! \cdot 5! \cdot \binom{11}{5}$, mert külön sorbaállítjuk a lányokat és a fiúkat (ez egymástól független), majd a fiúk közötti helyekre beszúrjuk az 5 lányt (11 helyből kell 5-öt választanunk).

11. **Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?**
Ha n páros, akkor $2 \cdot (n/2)! \cdot (n/2)!$, mert külön elrendezzük a párosokat és a páratlanokat, majd eldöntjük, hogy párossal vagy páratlannal kezdődjön a sorozat. Ha n páratlan, akkor mindenképpen páratlan számmal kell kezdeni a sorozatot, így az $(n-1)/2$ páros és $(n+1)/2$ páratlan szám külön-külön sorbarendezése után a közös sorrend már adott: $((n-1)/2)! \cdot ((n+1)/2)!$

12. Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük

(a) **legalább két különböző?** 63, mert lehet, hogy kihúzzuk egymás után a 62 zöldet, és ekkor ha húzunk még egyet, már biztos van benne két különböző.

(b) **legalább három piros?** 95, mert lehet, hogy először kihúzzuk az összes nem pirosat, és utána még kell hármat húznunk.

(c) **legalább két azonos?** 4, mert 3 féle golyónk van, így ha húzunk 3 különbözőt, akkor a negyedik már nem lehet újabb színű.

13. **Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?**
$\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2!3!}$, mert a 12 emberből kiválasztunk hármat az első háromágyas szobába, aztán a maradékból megint hármat a másodikba sít. Ekkor viszont az azonos szobák különböző sorrendjeit külön eseteknek vettük, ezért kell az osztás.

14. **Hányféleképpen lehet az ötös lottón (90 számból ötöt húznak ki) ötös, négyes, illetve hármas találatom? (Feltételezhetjük, hogy a lottószámokat már kihúzták.)**
Ötös nyilván egyféleképpen, négyesnél kiválasztjuk, hogy az ötből melyik négyet szeretnénk eltalálni, és a fennmaradó 85-ből melyik legyen a nem-találat, tehát $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$, hármasnál hasonló logikával $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$.

15. **Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \ldots 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?**
Vagy választunk 4 negatívot, vagy 4 pozitívot, vagy 2 negatívot és két pozitívot, így $\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2}\binom{10}{2}$.

16. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?**
$9 \cdot 1 \cdot 10^8$, mert az első helyre 0-t nem választhatunk, második hely fix, az összes többire pedig az összes számjegyet választhatjuk.

17. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?**
Az összes lehetségesből eldobjuk azokat, amelyekben *nem* szerepel az 5-ös számjegy (az eslő helyen természetesn nem állhat 0): $9 \cdot 10^9 - 8 \cdot 9^9$.

18. **Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?**
Vagy minden jegy 1, vagy választanunk kell 1 helyet 1 nullának, vagy két 0-t kell elhelyzni: $1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}$.

19. **Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?**
Észrevehetjük, hogy tetszőleges 4 különböző számjegyből tudunk a feltételeknek megfelelő számot előállítani, a számjegyek sorbarendezésével. A 0 nem szerepelhet, mert annak kéne az első jegynek lennie, ami nem jó. Így egyszerűen a 9 lehetséges számjegyből kell négyet választani: $\binom{9}{4}$.

20. **Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?**
Minden zászlóhoz egymástól függetlenül el kell dönteni, hogy melyik rúdra kerüljön: 10^20.

21. **Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszlánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat**

az idomár? És ha a sorrend nem számít?
3^7, mert minden pozícióba választunk egy macskát a többitől függetlenül. Ha a sorrend nem számít, akkor ez az ismétléses kombináció $n = 3, k = 7$ esete.

22. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne

    (a) **piros vagy ász?** $\binom{32}{4} - \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonva a rossz húzásokat.

    (b) **piros és ász?** $\binom{32}{4} - \binom{24}{4} - \binom{28}{4} + \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonjuk az így és az úgy rosszakat, viszont a mindkét feltétel szerinti rosszakat kétszer is levontuk, ezért ezeket az eseteket hozzá kell még adni.

23. **Bizonyítsuk be, hogy**

    (a) $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n}{k} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)$

    (b) $n \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (k+1) \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) + k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$

    Egyszerű átalakításokkal.