Algel XIII. gyakorlat

$P?NP$, part 1

2012. április 23.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!!!
- **P-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP-teljesség bizonyítása**: jön, jön, jön! Featuring: Karp-redukció, a.k.a. polinomiális visszavezetés! 2 hét múlva előadáson és gyakorlaton! (18 év alattiaknak és bölcsészeknek nem ajánlott.)

Feladatok

1. Gondolkozzunk el az NP-beliség, $coNP$-beliség és P-beliség fogalmakon!
2. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?
   (a) $\pi_1 = \{(G, k) \mid G \text{ gráf kiszínezhető } k \text{ színnel}\}$
   (b) $\pi_2 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráfban van Euler-kör}\}$
   (c) $\pi_3 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ független pont}\}$
3. Bizonyítsuk be, hogy a következő probléma P-beli:

$$\pi = \left\{ G \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ gráf kiszínezhető a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy,} \\ \text{hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék} \end{array} \right\}$$

4. Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben
   (a) meghatározza $\alpha(G)$-t!
   (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

---

5. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?
   (a) $\pi_1 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van teljes párosítás}\}$
   (b) $\pi_2 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van } k \text{ élből álló párosítás}\}$
   (c) $\pi_3 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne pontosan 100 élből álló kör}\}$
   (d) $\pi_4 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne legalább } k \text{ élből álló kör}\}$
   (e) $\pi_5 = \left\{ (s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \mid \forall i \; s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k \; (1 \le k \le n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b \right\}$

6. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP-beli!

7. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?

8. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?

9. Legyen a π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\pi \in NP \cap coNP$.