Algoritmusok és gráfok - 4. vizsga
2024. január 23.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

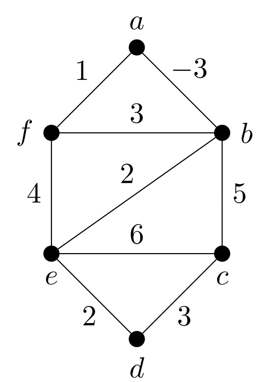
1. Egy 11 méretű hash táblába 7 kulcsot szúrtunk be nyílt címzéssel, lineáris próbával, a $h(K) =$ K maradéka 11-gyel hash függvényt használva. (A lineáris próba lefele indul.) Törlés nem történt.
Ezután a hash táblát lemásoltuk kézzel egy papírra, de sajnos az egyik számot rosszul írtuk le.
(a) Melyik az a szám, ami hibásan szerepel az alábbi táblában és miért?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12		14	5	6	17				16

(b) Adjon meg egy olyan számot, ami lehetett az eredeti, hibásan lemásolt szám (azaz ami helyett az a) pontban adott érték került be a táblázatba). Elég egy ilyen értéket megadni, de a választ itt is indokolni kell.

2. Egy négy csúcsú irányított gráfban az A, B, C, D és a B, A, D, C sorrend is topologikus sorrend. Adjon indoklással együtt egy, a lehető legtöbb élet tartalmazó olyan gráfot, ahol ez előfordulhat és mutassa meg azt is, hogy ennél több él nem szerepelhet egy ilyen gráfban.

3. Az alábbi gráfon futtatjuk Prim algorimusát az a csúcsból.
(a) Az ab és af élek beválasztása után hogyan néz ki a *legkisebb* tömb és miért?
(b) Melyik élet választja be ezután az algoritmus és hogyan változik ettől a *legkisebb* tömb? Röviden indokolja is a választ.
(c) Hogyan fejeződik be azután az algoritmus, mely élek kerülnek a feszítőfába és milyen sorrendben? (Itt a *legkisebb* tömb változásait már nem kell megadni, de röviden indokolja a választ.)



4. Egy hat csúcsú irányítatlan, nem élsúlyozott G gráfban a szélességi bejárást (BFS) az A csúcsból futtatva az AB, AD, BC, DE, DF élek kerülnek be a szélességi feszítőfába ebben a sorrendben.
(a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúcstól 1?
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúcstól 3?
(c) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúcstól 5?

5. Adott két AVL fa, mindegyikben n számot tárolunk, n értéke páratlan, azaz a fáknak páratlan sok csúcsa van. Egy fán belül a számok különböznek, de a két fának lehetnek közös értékei.
(a) Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a második fa legkisebb eleme megegyezik-e az első fa legnagyobb elemével.
(b) Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a második fa középső eleme megegyezik-e az első fa középső elemével. (Egy fa középső eleme az az érték, aminél a fában ugyanannyi kisebb, mint nagyobb szám szerepel.)
(c) Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a két fában pontosan ugyanazok a számok szerepelnek-e.

6. Szomszédossági mátrixával (legyen ennek neve A) adott egy n csúcsú irányítatlan, élsúlyozott G gráf, mely egy ország úthálózatát írja le. A gráf csúcsai a városok, az élek a városok között menő közvetlen utak, az élek súlyai pedig az utak hosszát adják meg kilométerben. Adott továbbá egy másik n-szer n-es M mátrix is, aminek $M[i, j]$ értéke azt adja meg százalékban, hogy mekkora a legnagyobb meredekség, ami az i városból j városba haladva valamely felfele menő emelkedőn előfordul. $M[i, j]$ értéke végtelen, ha nincsen út i és j között, $M[i, j]$ értéke nulla, ha van út és az út teljesen vízszintes vagy végig lefele halad, egyébként az érték pozitív.

Szeretnénk egy kijelölt S városból eljutni egy másik kijelölt T városba, de úgy, hogy az út során ne legyen 10%-osnál meredekebb emelkedő (csotrogány autónkkal nem merünk ennél meredekebb utakra merészkedni). Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk határozni, hogy legkevesebb hány kilométert kell ehhez megtennünk?