Algoritmusok és gráfok - 2. vizsga
2024. január 9.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi szomszédossági mátrix egy hat csúcsú, nem élsúlyozott **irányított** gráfot ír le. Van-e olyan lehetséges értéke x-nek, amikor ebben a gráfban a csúcsok $6, 5, 3, 1, 2, 4$ sorrendje topologikus sorrend? Ha nincs, akkor indokolja meg ezt, ha pedig lehetséges, akkor adja meg az összes olyan értékét x-nek, amikor a $6, 5, 3, 1, 2, 4$ sorrend topologikus sorrend.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	x	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

2. Az alábbi szomszédossági lista által adott irányítatlan gráfban, ahol az y élsúly nem ismert, futtatjuk az a csúcsból a Prim algoritmust és azt tapasztaljuk, hogy az ac, ce, ed, cf, bc élek kerülnek be a minimális feszítőfába, ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy y értéke csak 2 lehet.

a : $b(3), c(1)$;
b : $a(3), c(y), d(2), e(3)$;
c : $a(1), b(y), e(1.5), f(2)$;
d : $b(2), e(1.3)$;
e : $b(3), c(1.5), d(1.3), f(3)$;
f : $c(2), e(3)$

3. A $9, 7, 12, 20, 6, 1, z, 5$ tömböt rendezzük összefésüléses rendezéssel. Adjon meg egy olyan, a tömbben máshol elő nem forduló z értéket, amikor a rendezés során pontosan 16 összehasonlítás történik (és persze indokolja is, hogy ez a z miért jó.)

4. Egy hat csúcsú **irányítatlan** G gráf csúcsot szélességi bejárással (BFS) járunk be az A csúcsból és eközben a feszítőfába az AD, AE, DB, DC, EF élek kerülnek be ebben a sorrendben.
(a) Lássa be, hogy nem lehetséges az, hogy ebben a G gráfban a mélységi bejárást (DFS) az A csúcsból futtatva ugyanezek az élek ugyanebben a sorrendben kerüljenek be a feszítőfába.
(b) Adjon példát egy olyan G gráfra, amiben van olyan A csúcsból indított szélességi bejárás (BFS) aminél a feszítőfába a fenti AD, AE, DB, DC, EF élek kerülnek be ebben a sorrendben, és van olyan A-ból indított mélységi bejárás (DFS) is, hogy a kapott feszítőfa egy út. Válaszát indokolja is.

5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami meghatározza, hogy hány olyan csúcsa van a fának, aminek a részfájában páros sok csúcs van. (Egy csúcs részfája magából a csúcsból és a csúcs összes leszármazottjából áll.)

6. Szomszédossági mátrixával adott egy élsúlyozott, irányítatlan gráf, ami egy hangyakolónia alaprajzát adja meg. A gráf csúcsai a kolónia csomópontjai, az élek az ezek között vezető járatoknak felelnek meg, az élek súlya pedig azt adja meg, hogy az adott útszakaszt mennyi idő alatt tudja megtenni egy hangya (feltesszük, hogy az összes hangya ugyanolyan gyorsan megy). A gráf két adott pontjába, A-ba és B-be leteszünk egy-egy hangyát. Szeretnénk meghatározni, hogy hány olyan csomópont van, amikre igaz, hogy ugyanakkor ér el oda a két hangya, ha egyszerre indulnak A-ból és B-ből és az út során a számukra legjobb útvonalat használják.

   Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani azt a feladatot? (A szokásos módon n a csomópontok számát jelöli.)