Algoritmusok és gráfok - 1. vizsga
2023. december 19.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Egy irányított, élsúlyozott G gráfban a csúcsok d, a, e, c, b, f sorrendje topologikus sorrend. Ezen topologikus sorrenddel alkalmazzuk a DAG-ban használható tanult eljárást az a csúcsból induló legrövidebb utak meghatározására.
(a) Mennyi $távolság[d]$ és $távolság[a]$ értéke és miért?
(b) A d, a, e, c, f csúcsok közül melyekből vezethet 3 súlyú él b-be és melyekből biztos, hogy nem vezet ilyen súlyú él, ha az algoritmus az e, c, d csúcsokra az alábbi távolságokat számolta ki (az f csúcs távolságát nem tudjuk): $távolság[e] = -5$, $távolság[c] = 7$, $távolság[b] = 9$?

2. Tekintsük a $3, 10, 8, x, 5, 12$ tömböt, ahol x egy máshol elő nem forduló pozitív egész számot jelöl.
(a) Van-e olyan lehetséges értéke x-nek, amikor a fenti tömböt beszúrásos rendezéssel rendezve pontosan 4 csere történik? Ha van, akkor elég egy ilyen x-et megadni (persze indoklással), nem kell az összeset megkeresni. Ha pedig nincs ilyen x, akkor ezt kell megindokolni.
(b) Van-e olyan lehetséges értéke x-nek, amikor a fenti tömböt kiválasztásos rendezéssel rendezve pontosan 4 csere történik? Ha van, akkor elég egy ilyen x-et megadni (indoklással), nem kell az összeset megkeresni. Ha pedig nincs ilyen x, akkor ezt kell megindokolni.

3. Egy 7 méretű hash táblába 7 kulcsot szúrtunk be nyílt címzéssel, lineáris próbával, a használt hash függvény a $h(K) =$ K maradéka 7-tel osztva függvény volt és az alábbi táblát kaptuk. (A lineáris próba lefele indul.) Törlés nem történt.
(a) A tömb minden eleméről döntse el, hogy lehetett-e ez az elsőnek beszúrt szám és ahol lehetett, ott adjon is meg egy megfelelő sorrendet.
(b) A tömb minden eleméről döntse el, hogy lehetett-e ez az utolsónak beszúrt szám és ahol lehetett, ott adjon is meg egy megfelelő sorrendet.

0	1	2	3	4	5	6
12	9	3	10	5	19	1

4. Egy hat csúcsú **irányított** G gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, e, b, c, d, f sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: a: 6; b: 1; c: 3; d: 2; e: 4; f: 5.
(a) Rajzolja fel a bejáráshoz tartozó feszítőfát (azaz a felfedező élek fáját). Ezt most kivételesen nem kell indokolni.
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él d-ből e-be? Itt már kell indoklás is!
(c) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él d-ből f-be? Itt már kell indoklás is!

5. A $T[0 : n-1]$ **rendezett** tömbben a $0, 1, 2, \ldots, n-2$ értékek fordulnak elő úgy, hogy az egyik érték kétszer szerepel, a többi pedig pontosan egyszer. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást a duplán előforduló szám megkeresésére. (Nem kell pszeudokód, elég egy **pontos**, szöveges leírás.)

6. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig a az adott útvonal hosszát adja meg méterben. A városban 5 postahivatal van, ahol levelet lehet feladni, ezek mindegyike egy-egy csomópontban van. Az A csomópontban levő lakásunkból szeretnénk a B csomópontban levő egyetemig eljutni rollerrel úgy, hogy közben beugrunk valamelyik postára feladni egy levelet és a lehető legkevesebbet akarunk rollerezni (végig rollerrel megyünk).

   Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk határozni, hogy merre menjünk (vagyis nem csak az út hossza kell, hanem maga az útvonal is)? (A szokásos módon n a csomópontok számát jelöli.)