Algoritmusok és gráfok - 1. vizsga
2022. december 20.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. (a) Egy kezdetben üres bináris keresőfába a $3, 10, 1, 7, 6, 8, 2$ számokat szúrjuk be ebben a sorrendben a beszúrásra használt tanult eljárással. Rajzolja fel a kapott fát. (Itt kivételesen indokolni nem kell.)
(b) AVL-fa-e ez a bináris keresőfa?
(c) A tanult algoritmussal kitöröljük az (a) pontban kapott fából a 3-as számot. Rajzolja fel az új fát és röviden írja le, hogy hogyan kapta.

2. A 100 hosszú $51, 52, 53, \ldots, 99, 100, 1, 2, 3, 4, \ldots, 48, 49, 50$ tömböt rendezzük kiválasztásos, beszúrásos és buborékrendezéssel. Melyik esetben történik a **legkevesebb csere**? (A válaszhoz nem feltétlenül kell kiszámolni a cserék pontos számát az egyes esetekben.)

3. (a) Az alábbi (ismeretlen értékeket tartalmazó) szomszédossági mátrix egy hat csúcsú **irányítatlan** gráfot ír le. Határozza meg az ismeretlen értékeket, ha tudjuk, hogy a gráf fa.
(b) Adja meg a gráf szomszédossági listás reprezentációját is.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	u	0
2	x	0	y	0	0	0
3	1	z	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	v	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0

4. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló **irányított**, élsúlyozott G gráfban az A kezdőcsúcsból, eközben az *eddigi_legjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigi_legjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

A	B	C	D	E
$\star$	3	∞	5	∞
$\star$	$\star$	4	5	7
$\star$	$\star$	$\star$	5	6
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	6
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

(a) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él A-ból E-be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
(b) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él C-ből E-be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
(c) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él B-ből D-be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.

5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, amiben néhány csúcs pirosra van színezve, a többi csúcs zöld. (A fa úgy van megadva tehát, hogy minden csúcsnál a tárolt számérték mellett az is fel van jegyezve, hogy mi a csúcs színe.)
Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami meghatározza, hogy hány olyan csúcsa van a fának, aminek a részfájában minden csúcs piros. (Egy csúcs részfája magából a csúcsból és a csúcs összes leszármazottjából áll.)

6. Egy nagyvárosban takarékoskodni kell a közvilágítással, ezért úgy döntenek, hogy néhány helyen csak tartalékvilágítást használnak. Szomszédossági mátrixával adott a város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy hány lámpa van a két kereszteződés között vezető közvetlen utcán (ez a szám legalább 1 minden utcára). A lámpákat útszakaszonként lehet takarékra kapcsolni, azaz két csomópont között vagy minden lámpa takarékon van vagy egy sincsen. Az útszakaszokat egymástól függetlenül lehet szabályozni és a városban használt összes lámpa egyforma (ugyanonnan vették), azaz minden egyes lámpa takarékra állítása ugyanannyi spórolást eredményez.
A város vezetése szeretné úgy megtervezni a világítás átalakítását, hogy bármelyik csomópontból bármelyik csomópontba el lehessen jutni úgy, hogy végig rendesen (nem tartalékon) kivilágított utcákon haladunk, de ezt úgy szeretnék elérni, hogy a lehető legtöbb lámpát szeretnék tartalékra kapcsolni (vagyis a lehető legkevesebb lámpát akarják teljes fényerővel használni).
Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?