

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejteni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

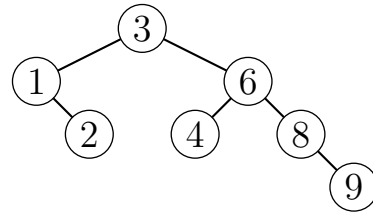
1. Lássá be megfelelő c konstans és n_0 küszöbérték megadásával, hogy ha egy algoritmus lépésszáma

$$2020n^2 \log n + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n} - 2019$$

akkor az algoritmus futásideje $O(n^3)$.

2. (a) Írja le, hogy irányítatlan gráfban mit jelent az, hogy egy v csúcs $d(v)$ -vel jelölt fokszáma 8.
(b) Mondja ki az irányítatlan gráfokban a fokszámok összegéről tanult tételt és bizonyítsa be.

3. (a) Az órán tanult eljárásokkal szűrje be az alábbi bináris keresőfába a 7-et, majd törölje ki az így kapott fából a 3-at. Mindkét műveletnél magyarázza is el 1-2 mondatban, hogy mi miért történt.
(b) AVL-fa-e a kiindulási fa és AVL-fa-e a két művelet után kapott fa?



4. Egy hat csúcsú gráf csúcsai meg vannak címkézve a 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokkal és a gráfban akkor van él két csúcs között, ha a csúcsok címkéi relatív prímek (azaz a legnagyobb közös osztójuk 1). A gráf élei súlyozottak, az i és j címkéjű csúcsok közt futó él súlya $i \cdot j$ (azaz például a 6 és 7 címkéjű csúcsok között van él és ennek súlya 42).

Minimális súlyú feszítőfát keresünk ebben a gráfban Kruskal algoritmusával. Melyik éleket választja be az algoritmus és milyen sorrendben?

5. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló irányított, élsúlyozott G gráfban az A kezdőcsúcsból, eközben a d tömb így változik (az egyes sorok a d tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

	A	B	C	D	E
*	5	∞	1	∞	
*	3	5	*	∞	
*	*	4	*	∞	
*	*	*	*	8	
*	*	*	*	*	

Milyen csúcsokkal van biztosan összekötve a B csúcs (bejövő és kimenő élekre is gondoljon) és mi ezeknek az élsúlya?

6. DFS-t (mélységi bejárást) futtatunk az A, B, C, D, E, F csúcsokból álló irányítatlan G gráfon a D kezdőcsúcsból, a DFS fába a DA, AF, FE, DB, BC élek kerülnek be ebben sorrendben. Mely csúcsokkal lehet összekötni az F csúcs a gráfban és melyekkel nem?
7. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, irányítatlan G gráf és adott egy, a csúcsokkal indexelt R tömbben a csúcsok egy részhalmaza oly módon, hogy ha a v csúcs nincsen benne a részhalmazban, akkor $R[v] = 0$, ha pedig v benne van a részhalmazban, akkor $R[v] = 1$.
Azt szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy a gráf minden élének legalább egyik végpontja az R halmazban van.
Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.
8. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, irányított, élsúlyozott G gráf csupa pozitív élsúllyal, ahol minden csúcsnak van egy címkéje, egy pozitív egész szám, ezek a címkék nem feltétlenül különbözőek. A csúcsok címkéi egy, a csúcsokkal indexelt T tömbben adottak. Ki van jelölve még két csúcs is, A és B , a gráfban. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami megtalálja a legrövidebb összhosszúságú olyan utat A -ból B -be ahol az úton csak 100-nál kisebb címkéjű csúcsokon haladunk át (A és B címkéjét is beleértve) vagy jelzi, ha nincsen ilyen út.