Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2020. január 15.

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejteni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

1. Az alábbi pszeudokód inputja egy n sorból és n oszlopból álló A mátrix, lépésnek az értékadás és az összehasonlítás számít. Igaz-e, hogy ez a kód $O(n)$-es? Ha igaz, akkor lássa be ezt, ha pedig nem igaz, akkor lássa be, hogy $O(n^2)$-es az algoritmus.

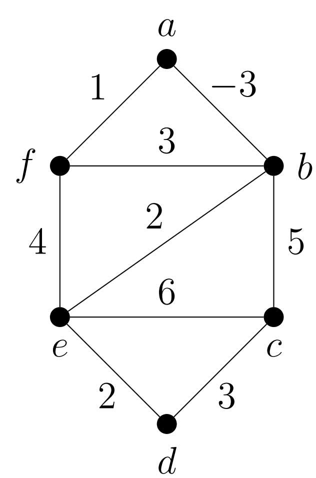
```
ciklus i = 1-től n-ig:
    ha A[i,i] == 0:
        k := 0
        ciklus amíg k < 20:
            A[i,i] := A[i,i] + k
            k := k+1
        ciklus vége
ciklus vége
```

2. (a) Mikor mondjuk, hogy egy irányítatlan gráf fa?
   (b) Mondja ki az n csúcsú fa éleinek számáról tanult állítást és bizonyítsa be. A bizonyítás során felhasználhatja indoklás nélkül, hogy minden legalább 2 csúcsú fában van legalább két elsőfokú pont.

3. Egy irányított gráf élei a következők: $AB, AC, BC, BD, CE, DF, DG, EB, ED, EF$. Futassa le a mélységi bejárást az A csúcsból ezen a gráfon, majd a mélységi bejárás eredményét felhasználva, az órán tanult módszerrel döntse el, hogy van-e ebben a gráfban topologikus sorrend és ha van, akkor adjon is meg egyet.

4. Az alábbi gráfon futtatjuk Prim algorimusát az a csúcsból, az ab és af élek beválasztása után a *legolcsóbb* tömb így néz ki:

a	b	c	d	e	f
$\star$	$\star$	5	∞	2	$\star$



   (a) Hogyan néz ki a *közeli* tömb ekkor és miért?
   (b) Melyik élet választja be most az algoritmus és hogyan változik ettől a *legolcsóbb* tömb? Röviden indokolja is a választ.

5. BFS-t (szélességi bejárást) futtatunk az A, B, C, D, E, F csúcsokból álló irányítatlan G gráfon az A kezdőcsúcsból, a BFS fába az AB, AC, BD, CE, CF élek kerülnek be ebben sorrendben. Mely csúcsokkal lehet összekötve az E csúcs a gráfban, melyekkel nem és miért?

6. Mutassa meg, hogy ha egy 30 csúcsú AVL-fában az 1 és 30 közötti egész számokat tároljuk (az 1 és a 30 is benne van), akkor nem lehetséges, hogy egy érték keresése során a $2, 8, 3, 7$ számokat látjuk ebben a sorrendben.

7. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, irányítatlan G gráf és adott egy, a csúcsokkal indexelt R tömbben a csúcsok egy részhalmaza oly módon, hogy ha a v csúcs nincsen benne a részhalmazban, akkor $R[v] = 0$, ha pedig v benne van a részhalmazban, akkor $R[v] = 1$.
   Azt szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy mindegyik R-beli csúcspár össze van kötve a gráfban.

   Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

8. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az adott útszakasz hossza. Adott a gráfban két kijelölt él, (u_1, v_1) és (u_2, v_2), és két kijelölt csúcs, A és B, és szeretnénk meghatározni a legrövidebb olyan út hosszát, ami A-ból B-be vezet úgy, hogy legfeljebb az egyik kijelölt élet használja.

   Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot? (Itt n szokásos módon a gráf csúcsainak számát jelöli.)