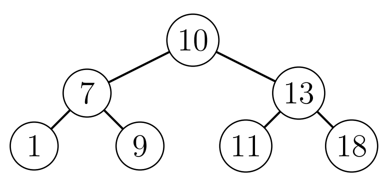
Algoritmusok és gráfok
ÖTÖDIK GYAKORLAT, 2019. október 11.
Megoldások néhány feladathoz

1. Futassa le a ládarendezést az $A = [7, 3, 9, 1, 5, 8, 2]$ inputon, ha tudjuk, hogy a számok 0 és 10 közötti értéket vehetnek fel.

   Megoldás
   Először egy 11 hosszú, csupa 0 B tömböt kell felvennünk.
   Mire végigmegyünk az A tömbön a B tömb így fog kinézni: $[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0]$
   Ezután a B-n végigmenve kapjuk az outputot: $[1, 2, 3, 5, 7, 8, 9]$

2. (a) Hogyan néz ki az a bináris keresőfa, melyben a csúcsok három szinten helyezkednek el és a fában az 1, 7, 9, 10, 11, 13, 18 értékeket tároljuk?
   (b) Milyen sorrendben írja ki a preorder, inorder és posztorder bejárás a fában tárolt értékeket?
   (c) Hogyan tudnánk megkeresni ebben a fában gyorsan a 9-es értéket? Hogyan tudnánk megkeresni (és észrevenni, hogy nincs benne) ebben a fában gyorsan a 17-es értéket?

   Megoldás
   (a) Mivel egy 3 szintű bináris fában legfeljebb 7 csúcs van, nekünk meg 7 értékünk van, ezért a fa csak úgy nézhet ki, hogy ezen a három szinten minden csúcs jelen van.
   Mivel a fa bináris keresőfa, ezért a gyökérbe az az érték kerül, amire igaz, hogy 3 nála kisebb és 3 nála nagyobb szám van, vagyis a gyökérben a 10 van és a bal fába kerül az $1, 7, 9$, a jobb részbe pedig a $11, 13, 18$. A bal rész gyökerébe a keresőfa tulajdonság miatt a $1, 7, 9$ hármas középső értéke kerül, tőle jobbra csak a 9, balra pedig az 1 állhat, hasonlóan indokolható a jobb részfa is és végül azt kapjuk, hogy a fa csak ez lehet:



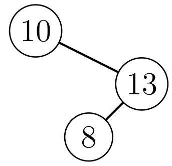
   (b)
   preorder: 10, 7, 1, 9, 13, 11, 18
   inorder: 1,7,9,10,11,13,18
   posztorder: 1,9,7,11,18,13,10

   (c) Mivel a 9 kisebb, mint a gyökér, biztos, hogy a bal fában van, ha van egyáltalán. A bal fa gyökere a 7, ettől jobbra kell lennie, ha van és ott meg is találjuk.
   A 17-es nagyobb a gyökérnél, ezért jobbra keressük tovább, nagyobb a 13-nál, ezért megint jobbra megyünk, kisebb, mint a 18, ezért balra megyünk, de ott nincs semmi, pedig itt lennie kéne valaminek, ha benne lenne a fában a 17.

3. Egy bináris fában különböző számokat tárolunk úgy, hogy a fában tárolt mindegyik x értékre teljesül az, hogy x jobb gyereke (ha van) nagyobb, mint x, x bal gyereke (ha van) pedig kisebb, mint x. Mutassa meg, hogy ebből még nem következik, hogy ez egy bináris keresőfa.

Megoldás

A következő példában teljesül az, hogy minden csúcs bal gyereke kisebb, jobb gyereke nagyobb, mint a csúcs értéke, a fa mégsem bináris keresőfa, mert a 10-es csúcsnak a jobb fájában van a 8-as.



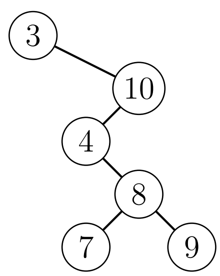
4. **(PZH 2018)** Egy bináris keresőfa preorder bejárása során a fa csúcsait $3, 10, 4, 8, 7, 9$ sorrendben látogatjuk meg. Rajzolja fel ezt a hat csúcsú bináris keresőfát, ahol ez megtörténhetett, majd lássa be, hogy a fa csak így nézhet ki.

   Megoldás A preorder bejárás a gyökeret írja ki először, ezért biztos, hogy a gyökérben a 3-as van. Mivel ez bináris keresőfa és minden más érték nagyobb, mint 3, ezért az összes többi elem a 3-as jobb fájában van, a bal fa üres.

   A többi (azaz $10, 4, 8, 7, 9$) elem közül a preorder bejárás megint csak az ezeket tartalmazó részfa gyökerét látogatja meg először, azaz a 3-as csúcs jobb gyereke a 10-es, a 10-es bal fájában pedig $4, 8, 7, 9$ van, vagyis a 10-es csúcs jobb fája üres.

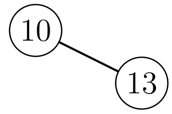
   A preorder bejárás a 10-es csúcs bal fáját (amiben a $4, 8, 7, 9$ van) úgy járja be, hogy először a gyökeret érinti, vagyis ez a 4-es, ennek jobb részfájában van $8, 7, 9$. Mivel ezek közül a 8-at látjuk először, ő lesz ennek a részfának a gyökere, tőle jobbra van a 9, balra pedig a 7 (a keresőfa tulajdonság miatt).

   Tehát ez a fa (és csak ez lehet, mert sehol nem volt válaszásunk, mindig egyértelmű volt a preorder bejárásból, hogy mi az éppen vizsgált részfa gyökere, a keresőfa tulajdonságból pedig az következett, hogy mik vannak ennek a csúcsnak a bal és jobb részfájában):

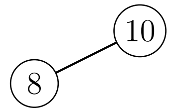


5. Egy bináris keresőfa "valamely bejárásán" mindig a $\{pre,\ in,\ post\}$-order valamelyikét értjük.
   (a) Mely bejárásoknál lehetséges az, hogy a tárolt elemek legnagyobbika megelőzi a legkisebbet?
   (b) Tegyük fel, hogy egy bináris keresőfában az $1, 2, \ldots, n$ számok vannak tárolva, továbbá hogy a fa valamely bejárásánal a számok az $n, n-1, \ldots, 1$ sorrendben következnek. Határozzuk meg, melyik lehetett ez a bejárás és milyen lehetett ez a bináris keresőfa!

   Megoldás
   (a) Posztordernél lehetséges:



Preordernél is lehetséges:



Inordernél nem lehetséges, mert:

- ha a gyökérnek van mindkét részfájában elem, akkor a legkisebb elem a bal, a legnagyobb pedig a jobb fában van és a bal fát előbb járom be, mint a jobbat
- ha a gyökérnek csak bal részfája van, akkor a legnagyobb elem a gyökér, de ezt fogom utoljára meglátogatni
- ha a gyökérnek csak jobb részfája van, akkor a legkisebb elem a gyökér, de ezt fogom először meglátogatni

(b) Az (a) részből következik, hogy inorder nem lehetett.
Ha preordernél az n-et írom ki először, akkor ez a gyökér, de mivel minden más elem nála kisebb, ez azt jelenti, hogy a gyökérnek nincs jobb részfája. A bal részfa gyökere lesz a következő elem, amit a preorder kiír, azaz ez $n-1$, de ennél minden elem kisebb, vagyis az $n-1$ jobb fája is üres. Ezt a gondolatot folytatva kapjuk, hogy ekkor a fa szükségképpen egy balra tartó egyenes út, ezen vannak a gyökértől lefele haladva az $n, n-1, \ldots, 2, 1$ számok.

Ha posztordernél az 1-et írom ki utoljára, akkor ez a gyökér, de mivel minden más elem nála nagyobb, ez azt jelenti, hogy a gyökérnek nincs bal részfája. A jobb részfa gyökere lesz az utolsó előttinek kiírt elem, azaz ez a 2, de ennél minden elem nagyobb, vagyis a 2 bal fája is üres. Ezt a gondolatot folytatva kapjuk, hogy ekkor a fa szükségképpen egy jobbra tartó egyenes út, ezen vannak a gyökértől lefele haladva az $1, 2, \ldots, n-1, n$ számok.