

1. Az ütközések feloldására egy, a nyílt címzéstől különböző stratégia a vödrös hash. Ennél a megoldásnál mindegyik cella egy listát tartalmaz, a listát azon elemek alkotják, amikre a hash függvény a cella indexét adja vissza. Beszúráskor a  $K$  kulcsot a  $h(K)$  indexű cella listájának a végére illesztjük, a  $K$  kulcs keresésekor a  $h(K)$  indexű cella listáját járjuk végig, törléskor pedig a megtalált elemet a listáknál tanult módon (a mutatók állításával) töröljük a listából.

Vödrös hash-t használva akarunk számokat tárolni, a  $h(k) = k$  maradéka 11-gyel osztva hash függvényt használva.

(a) Szűrjük be a kezdetben üres, 11 méretű hash táblába a 2, 5, 12, 1, 3, 88, 23, 43, 10, 34 elemeket!

(b) Hány lépésről állnak az a) pontban feltöltött táblában a következő keresések: keres(1), keres(20), keres(45)?

(c) Hogyan zajlik az a) pont táblájában az 23 törlése?

2. A  $h(k) = k$  maradéka 9-cel osztva hash függvényt használva vödrös hasheléssel akarunk számokat tárolni. Minden  $n$ -re adjon olyan  $n$  hosszú számsorozatot, hogy az  $n$  darab szám beszúrása után egy következő keresés rossz esetben  $n$  lépésig tartson.

3. (**Vizsga 2018**) Az alábbi 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szűrtünk be néhány egész számot majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (\* jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a  $h(K) = K$  maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	4	*	3	15		6	18			22

Ebben a táblázatban egyetlen olyan szám van, amire igaz, hogy ha ezt a számot kitöröljük, majd újra beszúrjuk, akkor a szám egy másik helyre kerül vissza. Melyik ez a szám? Válaszának indoklására mutassa be, hogy hogyan zajlik ennek a számnak a törlése és beszúrása.

4. (**Mintazh 2018**) A 0 és 70 közötti páratlan számokat szűrjük be valamilyen sorrendben, nyílt címzéssel, lineáris próbával egy kezdetben üres 47 méretű hash táblába, a  $h(K) = K$  maradéka 47-tel osztva hash függvényt használva. Mutassa meg, hogy mindegy, hogy a számok milyen sorrendben érkeznek, az ütközések száma minden sorrend esetén ugyanannyi.
5. Egy  $m$  méretű hash-táblában már van néhány elem. Adjon  $O(m)$  lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy egy újabb elem lineáris próbával történő beszúrásakor maximum hány ütközés történhet.
6. (**ZH 2018**) Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szűrtünk be néhány egész számot, majd kettőt közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (\* jelöli a törölt cellákat, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a  $h(K) = K$  maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	1	26	*	15		6	*			10

(a) Mi lehetett az a 30-nál kisebb pozitív egész szám, amit a 7-es cellából töröltünk? Az összes lehetőséget adja meg.

(b) Mi lehetett az a 30-nál kisebb pozitív egész szám, amit a 3-as cellából töröltünk? Az összes lehetőséget adja meg.

7. Az 1 és 91 közötti összes 3-mal osztható egész számot valamilyen sorrendben egy  $M$  méretű hash-táblába raktuk a  $h(x) = x$  maradéka  $M$ -mel osztva hash-függvény segítségével, lineáris próbával. Ennek során hány ütközés fordulhatott elő, ha  $M = 35$ , illetve ha  $M = 36$  ?

8. (**Vizsga 2018**) Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szűrtünk be néhány egész számot, majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (\* jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a  $h(K) = K$  maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11		13	6	26	*	17			9	10

Adjon meg egy olyan pozitív egész  $x$  értéket, ami a táblázatban nem szerepel és aminek a keresése során több lépést kell tennünk, mintha beszúrni akarnánk  $x$ -et. Magyarázza is el, hogy hogyan zajlik  $x$  keresése és beszúrása.

9. A  $h(k) = k$  maradéka 7-tel osztva hash függvénnyel akarunk számokat tárolni, nyílt címzéssel, lineáris próbával.

Helyezzük el a táblában a 3, 4, 7, 11, 14, 17 kulcsokat ebben a sorrendben, majd töröljük ki a 3-at. Hány lépésből áll ezután keres(5)? És keres(10)? Hogyan zajlik a törlés utáni táblában a 18 beszúrása?

10. A  $b_0 \dots b_n$  alakú  $n + 1$  hosszú bitsorozatokat akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a  $b_0$  paritásbit, ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki. Ha nyitott címzésű hash-elést használunk  $h(x) \equiv x \pmod{M}$  hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor  $M = 2^n$  vagy  $M = 2^n + 1$  méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?