

Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2019. január 9.

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejteni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

1. Az alábbi pszeudokódban egy * kiírása számít egy lépésnek. Mutassa meg, hogy a pszeudokód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n^3)$.

```
ciklus i = 1-től (n-1)-ig:
    ciklus j = (i+1)-től n-ig:
        kiírunk j darab *-ot
    ciklus vége
ciklus vége
```

2. Írja le az órán tanult eljárást, amivel egy bináris keresőfában meg tudjuk találni a legkisebb tárolt elemet. Magyarázza el, hogy miért helyes ez az eljárás és mutassa meg, hogy a lépésszáma $O(h)$, ahol h jelöli a fa szintjeinek számát.
3. Mutasson példát olyan 5 csúcsú irányítatlan, összefüggő, egyszerű G gráfra és a gráfban a Prim algoritmus egy olyan futására, ahol egy, az algoritmus által később választott él súlya kisebb, mint egy korábban választotté.
A futás leírásakor az éleket kell felsorolni a beválasztás sorrendjében és röviden indokolni, hogy miért ezeket választja az eljárás.

4. **Ez a feladat az ideai anyagban nincsen benne!**

A Bellman-Ford algoritmust futtatjuk az

a: b(1), d(3), e(7); **b:** c(2), d(5); **c:** d(-1), f(-4); **d:** e(3); **e:** -; **f:** d(x), e(2)
éllistával adott gráfban, az **a** csúcsból (az x élsúly értéke nem ismert).

A T táblázat harmadik és negyedik sorában a $T[3, v]$ és $T[4, v]$ értékek így néznek ki:

	a	b	c	d	e	f
3	0	1	3	2	6	-1
4	0	1	3	1	1	-1

Mi lehet x értéke és miért?

5. Az órán tanult összefésülés eljárást futtatjuk az 1, 3, 5, 9 és 2, 10, y , 15, 16 rendezett tömbökön, ahol y értéke nem ismert.
(a) Hány összehasonlításban vesz részt a 9-es érték és miért?
(b) Hány összehasonlításban vesz részt az y elem és miért?
6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, irányítatlan G gráf és adott a csúcsok egy 3 színnel való színezése egy, a csúcsokkal indexelt S tömbben, ahol $S[v]$ a v csúcs színe: *lila*, *sárga* vagy *rózsaszín*.
Azt szeretnénk eldönteni, hogy ez egy olyan színezés-e, amiben azonos színű csúcsok között nem fut él G -ben. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

7. Matrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az átlagos idő, ami az út megtételéhez autóval szükséges. A várost egy folyó szeli ketté, a folyón hidak vannak, csak ezeken lehet átkelni a folyó egyik partjáról a másik partra.

Mindegyik híd egyirányú, vagy egy jobbsparti csomópontból vezet egy balpartiba vagy fordítva. A hidak egy listában adottak, egy hidat a (v_i, v_j) pár adja meg, ha a híd a v_i csomópontból a v_j csomópontba megy.

Lakásunk, mely az ℓ csomópontban és munkahelyünk, mely az m csomópontban van, a folyó ellentétes oldalán találhatóak, ezért amikor dolgozni megyünk át kell kelniük az egyik hídon. Van egy kedvenc híduk, amit használni szeretnénk és szeretnénk meghatározni azt a leggyorsabban megtehető utat, ami ezen a hídon keresztül vezet a lakásunkból a munkahelyünkre úgy, hogy a folyón csak egyszer kelünk át.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk találni ezt a legjobb útvonalat (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

8. Adott egy n méretű tömb, aminek az elején néhány (de legalább egy darab) 1-es áll, utána pedig minden elem 2-es (az lehetséges, hogy a tömb csupa 1-es számot tartalmaz). Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza az utolsó 1-es indexét.