Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2018. december 19.

1. Az alábbi pszeudokód inputja egy $n$-szer $n$-es $A$ tömb, melyben az $i$. sor $j$. elemét $A[i,j]$ jelöli ($1 \leq i,j \leq n$). A pszeudokód a futása során a tömb néhány elemét változtatja meg. Mutassa meg, hogy a kód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n)$.

```
ciklus  i = 1-től n-ig:
    A[i,i] : = 0
ciklus vége
ciklus j = 1-től  n-ig:
    ha (A[1,j] == 1 és A[2,j] == 1):
            A[j,j] : = 1
ciklus vége
```

2. Az összefésül eljárás inputját egy $k$ elemű rendezett $B$ tömb és egy $\ell$ elemű rendezett $C$ tömb alkotja, az eljárás pedig kimenetként egy $k+\ell$ elemű rendezett $D$ tömböt állít elő $B$ és $C$ elemeiből.
Írja le az órán tanult bizonyítást arra, hogy ez az eljárás $O(k+\ell)$ lépésszámú. (Magát az algoritmust nem szükséges részletesen leírni, csak annyiban, amennyiben ez a lépésszám indoklásához szükséges.)

3. Egy irányított, élsúlyozott gráf élei a következők (zárójelben az élsúlyok): $AB(3), AC(2), BC(1), BD(2), BE(5), BF(3), CD(4), CF(5), DA(1), DE(2), DF(3), EF(1), FB(3), FC(1)$.
Dijkstra algoritmusát futtatjuk ebben a gráfban, az $A$ csúcsból indulva, néhány lépés után a KÉSZ halmazban az $A, B, C$ csúcsok vannak, a $d$ tömb állapota pedig ez:

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $\star$ | $\star$ | $\star$ | 5 | 8 | 6 |

(a) Melyik csúcs kerül be a következő lépésben a KÉSZ halmazba és miért?
(b) Hogyan néz ki a $d$ tömb, amikor az új csúcs KÉSZ-be kerülése után a szükséges módosítások megtörténnek és miért?

4. Az alábbi irányítatlan $G$ gráfban (ahol az $x$ élsúly nem ismert) futtatjuk az $a$ csúcsból a Prim algoritmust és azt tapasztaljuk, hogy az $ab, bd, de, bc$ élek kerülnek be a minimális feszítőfába, ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy $x$ értéke csak 2 lehet.
$G$ élei: $ab(1), ac(x), bc(2), bd(x), cd(3), ce(4), de(1)$.

5. Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szúrtunk be néhány egész számot, majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk ($*$ jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a $h(K) =$ K maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | | 13 | 6 | 26 | * | 17 | | | 9 | 10 |

Adjon meg egy olyan pozitív egész $x$ értéket, ami a táblázatban nem szerepel és aminek a keresése során több lépést kell tennünk, mintha beszúrni akarnánk $x$-et. Magyarázza is el, hogy hogyan zajlik $x$ keresése és beszúrása.

6. Igaz-e, hogy az alábbi irányított, élsúlyozott gráfban a $B, C, D, A, E, F$ sorrend egy topologikus sorrend?
A gráf (irányított) élei: $AE, AF, BC, BD, BE, CA, CE, DE, DF$

7. Adott két teljes bináris keresőfa, mindegyikben $n$ elemet tárolunk. Adjon $O(\log n)$ elemszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fa minden eleme nagyobb, mint a második fa minden eleme.
(Emlékeztetőül: a teljes bináris fa olyan bináris fa, amiben minden szint tele van. )

8. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányított, egyszerű gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi idő alatt tud az adott szakaszon egy biciklis futár végigmenni.
Egy, az $f$ csúcsban tartózkodó biciklis futár azt a feladatot kapja, hogy a nála levő két csomagot a lehető leggyorsabban kézbesítse ki a város $b$ és $c$ csomópontjaiba (az mindegy, hogy milyen sorrendben kézbesít). Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni és hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben meghatározzuk, hogy milyen sorrendben kell a futárnak a csomagokat leadnia és mennyi a legrövidebb idő, ami alatt teljesíteni tudja a feladatát?