Csima Judit
csima@cs.bme.hu

11. gyakorlat
Minimális költségű feszítőfa, UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

1. G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjukból fel vannak sorolva):
   a:b(2),c(3); b:a(2),d(2); c:a(3),d(1); d:b(2),c(1),e(2),f(4); e:d(2),f(1),g(2); f:d(4),e(1),g(2),h(1); g:e(2),f(2),h(3); h:f(1),g(3);
   Keressünk G-ben (a) Prim algoritmusával minimális költségű feszítőfát g-ből kiindulva! (b) Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát!

2. UNIÓ-HOLVAN adatszerkezettel tároljuk az $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz partícióit. Kezdetben a triviális partíciónk van: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$.
   Hajtsa végre az alábbi műveleteket és rajzolja le, hogy hogyan néznek ki az adatszerkezetben használt fák az egyes műveletek után. Ha két egyforma méretű fát úniózunk, akkor legyen a kisebb gyökér az új fa gyökere.
   UNIÓ(1,2), UNIÓ(3,4), UNIÓ(5,6), UNIÓ(5,7), UNIÓ(5,1), HOLVAN(7), HOLVAN(2).
   Hogy döntjük el, hogy 6 és 4 ugyanabban a részhalmazban van-e?

---

3. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
   (a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
   (b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít).

4. Egy nagy filmes produkció filmet akar forgatni a városunkban. A város térképe egy irányítatlan gráffal adott, ahol a csúcsok a csomópontok az élek pedig a közvetlen utak közöttük. A filmesek minél több utat szeretnének lezárni a forgatás idejére, de minden egyes szakasz lezárásáért pénzt kérünk, a konkrét összeget tudjuk minden útra. (A filmesekneknek az összes út lezárására van pénzük.) Adjon algoritmust, ami meghatározza, hogy mely utakat engedjünk lezárni, ha a lezárás közben a városnak működnie kell (mindenhonnan mindenhova el kell tudni jutni) és a bevételünket maximalizálni akarjuk. A lépésszám legyen $O(n^2)$.

5. Mátrixával adott egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

6. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
   ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
   ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
   VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
   Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.