Valószínűségszámítás jegyzet 1. rész

A jegyzet elsősorban a BME-VIK informatikus hallgatóinak készült. Ez azt jelenti, hogy nem matematikai, csak mérnöki precizitással céloztuk meg a leírásokat, definíciókat, bizonyításokat. Így egy sokkal könnyebben emészthető olvasmányt kapunk. A cél, hogy a matematikát alkalmazni tanuló hallgatók minél könnyebben és gyorsabban minél nagyobb elméleti háttérbe kapjanak betekintést, és az eredményeket, eszközöket minél hatékonyabban tudják a gyakorlatban hasznosítani. A jegyzet struktúrája a tárgy tantárgyi adatlapján (TAD) szereplő óravázlat alapján lett kialakítva, így a főfejezetek címe is az egyes órák tömör leírása lett.

1. Történeti bevezető. Alapfogalmak: véletlen kísérlet, eseménytér, esemény, elemi esemény, műveletek eseményekkel. Axiómák, szigma algebra.

1.1. Definíciók

Gondolkozzunk el a kockadobáson... Fogunk egy szabályos kockát, eldobjuk, majd megnézzük az eredményt. Persze mindenki érzi, hogy 1/2 eséllyel dobunk párosat, de precízen hogyan kéne mindezt levezetni? Mivel matematikai tudományról beszélünk, így axiomatikus rendszert építünk, amiben az állításainkat bizonyítani is fogjuk. A matematikai elméletek mind két fő részből állnak: definíciók/axiómák és állítások (lehetne persze vitázni, hogy a felosztás nem tökéletes, de megértésünk szempontjából ez nekünk most kézenfekvő lesz). [Kíváncsibbaknak: a különbség az axiómák és definíciók között az, hogy míg a definíciók konzervatív módon bővítik az elméletünket, azaz csakis az újonnan bevezetett jelöléshez/objektumhoz kapcsolódó állítások lesznek a korábbiakon felül levezethetők, addig az axiómák teljesen új tételeket is eredményezhetnek (csak az eddig is meglévő jelöléseket/objektumokat felhasználva)]. Kezdjük tehát azzal, hogy a kockadobásból kiindulva a számunkra fontos definíciókat lefektessük, amik általános módon adnak majd alapot a másfajta valószínűségi problémák kezeléséhez is. (Hogy ne legyünk túlzottan a kockához ragadva, érdemes a $(0, 1)$ intervallumon való véletlen szám választásának feladatára is végiggondolnunk a későbbieket.)

Véletlen kísérlet: Egy olyan történés / jelenség, aminek az eredményeinek halmazát ismerjük előre, de a pontos kimenet ezek között véletlen alakul. Azonos feltételek mellett megismételhető.

A kockadobásunk esetén maga a dobás a kísérlet, az eredmények halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *A* $(0, 1)$*-beli véletlen szám választása esetén az eredmények halmaza a* $(0, 1)$ *intervallum.*

Esemény: olyan állítás, aminek az igazságtartalma a kísérlet elvégzése után kiértékelhető. Az eseményeket nagybetűvel fogjuk jelölni. Két esemény **kizáró**, ha egyszerre nem következhet be mindkettő. Egy A esemény **része** egy

B eseménynek (A maga után vonja B-t), ha A teljesülése esetén B mindenképp teljesül. Jelölése: $A \subseteq B$. Két esemény **ekvivalens**, avagy megegyezik, amennyiben mindkettő része a másiknak. Jelölése: $A = B$. A **biztos esemény** jele Ω, a **lehetetlen**é pedig $\emptyset$.

Kockadobás esetén az alábbiak mind események: $A = \{$4-et dobunk$\}$, $B = \{$4-et vagy 6-ot dobunk$\}$, $C = \{$Összetett számot dobunk$\}$, $D = \{$Páratlant dobunk$\}$, $E = \{$100-nál kisebbet dobunk$\}$, $F = \{3, 5$-öt dobunk$\}$. A és D kizáróak, A része B-nek, B és C ekvivalensek, E a biztos esemény, F pedig a lehetetlen.

Teljes eseményrendszer: $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ páronként kizáró események rendszere teljes eseményrendszer, ha a kísérlet bármely kimenetele esetén valamelyik A_i bekövetkezik (az alább definiált összeadást felhasználva átfogalmazható: az összegük Ω).

A kockadobás esetén például $T_1 = \{\{$párosat dobunk$\}, \{$páratlant pobunk$\}\}$, vagy $T_2 = \{\{$1-et dobunk$\}, \{$prímet dobunk$\}, \{$4-et vagy 6-ot dobunk$\}\}$ is teljes eseményrendszert alkotnak.

1.2. Műveletek eseményekkel

Egy A esemény **ellentettjén** (vagy **komplementerén**) azt az eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, amikor A nem. Jele $\overline{A}$. Vegyük észre, hogy $\overline{\Omega} = \emptyset$.

Két esemény **összege** (vagy **uniója**) az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha a két esemény közül legalább egy teljesül. Jele $A + B$ vagy $A \cup B$.

Két esemény **szorzatán** (vagy **metszetén**) azt az eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, amikor mindkét esemény teljesül. Jele $A \cdot B$, AB vagy $A \cap B$.

Egy A és egy B esemény **különbségén** azt az eseményt értjük, amikor az A bekövetkezik, de a B nem. Jele $A - B$ vagy $A \setminus B$. Figyeljük meg, hogy a számokon értelmezett ellentett és összeg műveletek kombinációjaként adódik a kivonás, ami itt teljesen mást eredményezne. Azonban más módon mégis 'kikeverhető' a különbség: $A - B = A\overline{B}$.

1.3. Tulajdonságok

Műveleti sorrend: A szorzás magasabb rendű, mint az összeadás és kivonás (a komplementer képzés még magasabb, de ez a jelölésrendszerből is egyértelmű). A következő ekvivalencia mutatja a műveleti sorrendet: $AB + CD = (AB) + (CD)$.

Mivel az eseményekre úgy tekintünk, mint a kísérlet kimeneteleinek egy-egy halmazára, így természetes, hogy a halmazelméleti alapokat kéne megismernünk a pontos megértésükhöz. A halmazelmélet rendkívül érdekes tudomány, az érdeklődőbb olvasónak érdemes a ZFC (Zermelo–Fraenkel choice) axiómákat tanulmányozni. Mi most nem mélyülünk el a halmazelméletben, de a következőkben átismételjük a halmazok néhány alapvető tulajdonságát az eseményekre vonatkozóan.

1. Tulajdonság(ok). *Az alábbi tulajdonságok minden A, B és C eseményre igazak:*

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $A \subseteq A$
3. $A + A = A$
4. $AA = A$
5. $A - A = A\overline{A} = \emptyset$
6. $A + \overline{A} = \Omega$
7. $A - \overline{A} = A$
8. $\overline{A} - A = \overline{A}$
9. $\emptyset \subseteq A$
10. $A + \emptyset = A$
11. $A\emptyset = \emptyset$
12. $A - \emptyset = A$
13. $A \subseteq \Omega$
14. $A + \Omega = \Omega$
15. $A\Omega = A$
16. $A - \Omega = \emptyset$
17. $A = B \Leftrightarrow B = A$ *(az ekvivalencia szimmetrikus/kommutatív)*
18. $A + B = B + A$ *(az összeg kommutatív)*
19. $AB = BA$ *(a szorzat kommutatív)*
20. $AB \subseteq A$
21. $A \subseteq A + B$
22. *De Morgan 1:* $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\qquad \overline{\Sigma_i A_i} = \Pi_i \overline{A_i}$
23. *De Morgan 2:* $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$; $\qquad \overline{\Pi_i A_i} = \Sigma_i \overline{A_i}$
24. $A = B$ *és* $B = C \Rightarrow A = C$ *(az ekvivalencia tranzitív)*
25. $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ *(a maga után vonás tranzitív)*
26. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(az összeadás asszociatív)*

27. $(AB)C = A(BC)$ *(a szorzás asszociatív)*

28. $A(B + C) = AB + AC$ *(a szorzás az összeadásra disztributív)*

29. $A + BC = (A + B)(A + C)$ *(a összeadás a szorzásra disztributív)*

Feladat: Ellenőrizük a tulajdonságokat egyszerű Venn-diagram segítségével!

1.4. σ-algebra

Ahhoz, hogy valószínűségekről beszélhessünk, még fontos megértenünk a σ-algebrákat.

2. Definíció. *Legyen X egy halmaz. Egy $\mathcal{R} \subseteq 2^X$ halmaz pontosan akkor* **σ-algebra** *X felett, ha teljesíti az alábbi három feltételt:*

1. $X \in \mathcal{R}$
2. *$\mathcal{R}$ zárt a komplementerképzésre:* $A \in \mathcal{R} \Rightarrow \overline{A} = X - A \in \mathcal{R}$
3. *$\mathcal{R}$ zárt a megszámlálható összegre:* $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R} \Rightarrow \Sigma_i A_i \in \mathcal{R}$

Egy kísérlet kimeneteleinek a halmazának nem feltétlen minden eleme érdekes számunkra. A vizsgálatainkhoz fontos a kísérleten definiálható események közül a számunkra **megfigyelhető**eket mindig előre megadni. Azonban nem válogathatunk kedvünkre, feltesszük, hogy a megfigyelhető események halmaza teljesíti a σ-algebra tulajdonságait a kísérlet kimeneteleinek X halmaza felett (sokszor megfigyelhető események rendszerének vagy megfigyelhető eseményrendszernek hívjuk). A megfigyelhető események halmazát sokszor eseményalgebraként is említik. [Egy kísérlethez tartozóan a valószínűségeket is a megfigyelhető események σ-algebráján fogjuk értelmezni (szükséges feltevés).] Fontos, hogy ezek az események nem mind kizáróak, gondoljunk csak arra, hogy Ω mindig megfigyelhető (a σ-algebra első tulajdonsága miatt), aminek pedig minden esemény a része.

Elemi esemény: Azokat a nem lehetetlen megfigyelhető eseményeket, amiknek nincs olyan nem lehetetlen megfigyelhető részeseménye, ami nem ekvivalens vele, elemi eseményeknek nevezzük. Azaz $A \in \mathcal{R}$ pontosan akkor elemi esemény, ha: $A \neq \emptyset$ és $\forall B \neq \emptyset, B \in \mathcal{R}, B \subseteq A : A \subseteq B$. Az elemi eseményeket ω-val jelöljük. Az elemi események kiválasztása nem teljesen egyértelmű, mert egy kísérlethez több elemi esemény halmaz is tartozhatna, ezért odafigyeléssel kell választanunk.

A kockadobásnál a megfelelő elemi események a következők: $\omega_1 =$ {1-et dobunk}, $\omega_2 =$ {2-t dobunk}, $\omega_3 =$ {3-mat dobunk}, $\omega_4 =$ {4-et dobunk}, $\omega_5 =$ {5-öt dobunk}, $\omega_6 =$ {6-ot dobunk}. Lehetne elemi esemény az, hogy "x lett a dobott érték, amit y oldalról átfordulva értünk el", de persze ez nem célszerű választás. Egy kockadobás sorozatnál, ahol addig dobunk amíg egy páratlan nem jön, majd még egy utolsót: Ha csak az utolsó dobás érdekel minket, nem lenne célszerű, ha egy elemi esemény tartalmazná az összes korábbi dobás értékét is.

Az elemi eseményeket sok helyen úgy definiálják, mint az egyetlen kimenetelt tartalmazó események. Ez nem mond ellent a mi általunk használt definíciónak, de abban az esetben a kísérlet kimeneteleinek megválasztására kell ugyan úgy odafigyelni, mint a mi esetünkben az elemi események megválasztására (lásd az előző példát).

3. Tulajdonság(ok). *Az összes elemi esemény valamelyike minden esetben teljesül, azaz összegük a biztos esemény. Emellett a különböző elemi események kizáróak is, ezért az elemi események teljes eseményrendszert alkotnak.*

4. Tulajdonság(ok). *A megfigyelhető események (ahogyan minden esemény) felírhatóak elemi események segítségével, egy megfelelő I indexhalmazzal $\Sigma_{i\in I}\omega_i$ alakban. Nem feltevés, hogy minden I indexhalmazhoz tartozó esemény megfigyelhető legyen (azonban ha az elemi események száma megszámlálható, akkor ez következik a σ-algebra 3. tulajdonságából).*

Eseménytér: Az elemi események halmaza. Mivel az összes elemi esemény összege Ω, ezért az eseményteret is szokásosan Ω-val jelöljük. Fontos megjegyezni, hogy abban az esetben, ha Ω nem megszámlálható, akkor az eseménytér önmagában nem határozza meg a megfigyelhető események halmazát.
A kockadobás esetén az előző példában látott elemi események mellett az eseménytér $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Innentől kezdve mi mindig megfigyelhető események σ-algebráján fogunk dolgozni.

5. Tulajdonság(ok). *A σ-algebra fenti tulajdonságaiból levezethetőek az alábbiak, amik így szintén mind teljesülnek a megfigyelhető eseményeink halmazára (a szöveges leírásokat is ennek megfelelően adjuk meg).*

1. *A lehetetlen esemény megfigyelhető:* $\emptyset \in \mathcal{R}$.
2. *Megfigyelhető események összege, szorzata és különbsége is megfigyelhető:* $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A + B, AB, A - B \in \mathcal{R}$
3. $\mathcal{R}$ *zárt a megszámlálható szorzatra:* $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R} \Rightarrow \Pi_i A_i \in \mathcal{R}$.
4. *Az elemi események kizáróak.*

Igazoljuk ezeket az állításokat:
1: következik az 1. és 2. tulajdonságból.
2: összeg: következik a 3. tulajdonságból, ha $A_1 = A$, $A_2 = B$ a többi esemény pedig $A_i = \emptyset$.
szorzat: a szorzat komplementerének a komplementere önmaga (korábban láttuk), erre pedig alkalmazva De Morgan 2-t $\overline{\overline{A} + \overline{B}}$-t kapjuk, ami a 2. tulajdonságból és az összegre zártságból már következik, hogy megfigyelhető.
különbség: átírható $A\overline{B}$-re, ami a 2. tulajdonságból és az szorzatra zártságból már következik, hogy megfigyelhető.
3: $\Pi_i A_i = \overline{\overline{\Pi_i A_i}} = \overline{\Sigma_i \overline{A_i}}$ (a második egyenlőség a De Morgan 2-ből következik),

ez pedig a 2. és 3. tulajdonságból következően megfigyelhető.
4: Az elemi események - legyen A és B - megfigyelhetőek, így szorzatuk is megfigyelhető (AB), azonban ez a szorzat mindkettőnek része. Elemi eseménynek megfigyelhető részeseménye csak önmaga vagy $\emptyset$ lehet. Ha két különböző elemi eseményről beszélünk ($A \neq B$), akkor ez csak úgy teljesülhet, hogy a metszet $\emptyset$, azaz kizáróak.

Nézzünk néhány példát megfigyelhető események halmazára.

- *Ha kockadobás esetén az elemi eseményeink: A ={párosat dobunk} és B ={páratlant dobunk}, akkor pontosan négy esemény lesz megfigyelhető: $\{\emptyset, A, B, \Omega\}$*
- *Ha kockadobás esetén az elemi eseményeink: A ={párosat dobunk}, B ={1-et dobunk}, C ={3-mat dobunk} és D ={5-t dobunk}, akkor már sok esemény lesz megfigyelhető, hiszen bármely események összege is megfigyelhető. Gondoljuk végig, hogy 16 esemény lesz megfigyelhető (kiszámolható a 4-elemű halmaz összes részhalmazainak száma alapján, ami 2^4).*
- *Ha kockadobás esetén nem ismerjük az elemi eseményeinket, de tudjuk, hogy X ={párosat dobunk} és Y ={3-nál nagyobbat dobunk} megfigyelhetőek, akkor mely események lesznek biztosan megfigyelhetőek? A σ-algebra 2. tulajdonságából következik, hogy $\overline{X}$ ={páratlant dobunk} és $\overline{Y}$ ={4-nél kisebbet dobunk} is megfigyelhetőek. Az 1. tulajdonságból és az első következményből tudjuk, hogy a biztos esemény és a lehetetlen esemény is megfigyelhetőek. A második következmény alapján az alábbiak is megfigyelhetőek (ezután az eseményeket a dobott számok halmaza alapján adjuk meg): $X+Y = \{2,4,5,6\}$, $X+\overline{Y} = \{1,2,3,4,6\}$, $\overline{X}+Y = \{1,3,4,5,6\}$, $\overline{X}+\overline{Y} = \{1,2,3,5\}$, $XY = \{4,6\}$, $X\overline{Y} = \{2\}$, $\overline{X}Y = \{5\}$, $\overline{X}\cdot\overline{Y} = \{1,3\}$. Ellenőrizhető, hogy már csak két esemény biztosan megfigyelhető, az $XY + \overline{X}\cdot\overline{Y} = \{1,3,4,6\}$ és a $X\overline{Y} + \overline{X}Y = \{2,5\}$.*

1.5. Valószínűség

6. Definíció. *Megfigyelhető események egy $\mathcal{R}$ σ-algebráján definiálhatjuk a* **valószínűség***et, mint a következő tulajdonságokat teljesítő P valós függvény:*

1. *A valószínűség nem negatív $0 \leq P(A)$.*
2. *A biztos esemény valószínűsége 1: $P(\Omega) = 1$.*
3. *Kizáró események megszámlálható összegének valószínűsége a valószínűségek összege:*
   $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in R, \forall i \neq j : A_iA_j = \emptyset \Rightarrow P(\Sigma_i A_i) = \Sigma_i P(A_i)$.

7. Definíció. *Az eseménytér, a megfigyelhető események halmaza és a rajtuk definiált valószínűség együtt úgynevezett (Kolmogorov-féle)* **valószínűségi mező***t alkot: $(\Omega, \mathcal{R}, P)$.*

A kockadobás esetén, ha szabályos kockáról beszélünk (és minden értékű kimenetel megfigyelhető), akkor vehetjük $\frac{1}{6}$-nak minden lehetséges érték valószínűségét, és így rögtön megkapjuk a 3. tulajdonságból minden esemény valószínűségét (az eseménybe foglalt lehetséges kimenetelek száma szorozva $\frac{1}{6}$-al). Ha az eseménytér megszámlálható elemszámú, akkor működik is ez a módszer, azaz az elemi események valószínűségeiből minden esemény valószínűségét megkaphatjuk (nem megszámlálható esetben nem működik, például az egységintervallumon egyenletesen választott pont esetén minden egyes pont valószínűsége nulla, az intervallumok azonban már a hosszuknak megfelelő valószínűséget képviselnek). A cinkelt kocka esete csak annyiban tér el a szabályosétól, hogy az egyes értékekhez más-más valószínűség társulhat, de a belőlük álló események valószínűsége a 3. tulajdonság miatt ugyanúgy ezeknek a valószínűségeknek az összegzésével számolható.

2. A valószínűség tulajdonságai: Poincaré-formula, Boole-egyenlőtlenségek, folytonossági tulajdonság

8. Tulajdonság(ok). *A valószínűség axiómáiból következnek az alábbi állítások:*

1. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) = P(AB) + P(A - B)$
4. *Ha* $B \subseteq A$, *akkor* $P(B) \leq P(A)$.
5. $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R}, \Sigma_i A_i = \Omega, \forall i \neq j : A_i A_j = \emptyset$ *(azaz* A_i *megszámlálható elemszámú teljes eseményrendszer)* $\Rightarrow \Sigma_i P(A_i) = 1$.
6. *Szita formula (Poincaré):*
   - *P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)*
   - *P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)*
   - $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{R} : X_{j,k}$ *legyen a k-adik olyan halmaz, amit úgy kapunk, hogy j darab* A_i*-t összeszorzunk* ($1 \leq k \leq \binom{n}{j}$). $P(\Sigma_i^n A_i) = \Sigma_{j=1}^n [(-1)^{j+1} \Sigma_{k=1}^{\binom{n}{j}} P(X_{j,k})]$
7. *Boole-egyenlőtlenségek:* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{R}$
   - $P(\Sigma_{i=1}^n A_i) \leq \Sigma_{i=1}^n P(A_i)$
   - $P(\Pi_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\Sigma_{i=1}^n \overline{A_i}) \geq 1 - \Sigma_{i=1}^n P(\overline{A_i})$
8. *Folytonossági tulajdonságok megszámlálható eseménysorozatokra:* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{R}$

- *Ha* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ... \subseteq \Sigma_i A_i$*, akkor* $P(\Sigma_i A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$
- *Ha* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ... \supseteq \Pi_i A_i$*, akkor* $P(\Pi_i A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$

3. Feltételes valószínűség, események, eseményrendszerek függetlensége. Teljes valószínűségi tétel, Bayes-tétel, szorzási szabály.

Egy nem nulla valószínűségű A esemény esetén beszélhetünk események **feltételes valószínűség**éről, ami egy olyan függvény, ami egy B megfigyelhető eseményhez a $\frac{P(AB)}{P(A)}$ valószínűséget rendeli. Szemléletesen arról van szó, hogy ha a kísérletünk kimeneteléről tudnánk, hogy az A esemény bekövetkezett, de semmi egyebet, akkor ennek tükrében mi lenne B valószínűsége. Ezt a valószínűséget $P(B|A)$-val jelöljük, amire tehát igaz, hogy

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Nézzünk néhány példát kockadobással. Ha például A ={párosat dobunk} eseményt feltételeznénk, akkor igazak lesznek a következő egyenlőségek: $P($6-ost dobunk$|A) = \frac{1}{3}$, $P($1-est dobunk$|A) = 0$, $P($páratlant dobunk$|A) = 0$, $P($3-nál nagyobbat dobunk$|A) = \frac{2}{3}$ és $P($párosat dobunk$|A) = 1$.

9. Tulajdonság(ok). *Az alábbi tulajdonságok következnek a definícióból bármilyen B megfigyelhető eseményre:*

1. $P(B|A) \geq 0$
2. $P(\Omega|A) = 1$
3. $B_1, B_2, ..., B_n, ... \in \mathcal{R}, \forall i \neq j : B_i B_j = \emptyset \Rightarrow P(\Sigma_i B_i|A) = \Sigma_i P(B_i|A)$
4. $P(B|A) \leq 1$
5. $P(A|A) = 1$
6. $P(\emptyset|A) = 0$

Az első három tulajdonságból látszik, hogy a feltételes valószínűség is teljesíti a valószínűség tulajdonságait (ezért jogos a szóhasználat).

10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy két A és B esemény* **független***, ha az egyiket feltételezve a másiknak a valószínűsége nem változik. Formálisan: $P(B|A) = P(B)$. A nulla valószínűségű eseményeket nem tudjuk feltételnek tekinteni (lásd a feltételes valószínűség definícióját), de ezeket mindentől függetlennek definiáljuk.*

11. Tulajdonság(ok). *Ha a definíció képletébe behelyettesítjük a feltételes valószínűség képletét, akkor azt kapjuk, hogy* $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$, *amit átrendezve azt kapjuk, hogy a szorzat valószínűsége a valószínűségek szorzata:*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ez a feltétel tehát ekvivalens a definícióval. (Figyeljük meg, hogy itt nem kell külön kezelnünk a 0 valószínűségű eseményeket).

Ebből a formulából könnyen látható, hogy a függetlenség szimmetrikus tulajdonság, azaz ha A független B-től, akkor B is független A-tól, ezért jogos a definícióban a szimmetrikus megfogalmazás: A és B függetlenek.
Szabályos kockadobás esetén vizsgáljuk meg, hogy az alábbi események közül mely párokra igaz, hogy függetlenek: $A = \{$*4-et dobunk*$\}$, $B = \{$*5-öt vagy 6-ot dobunk*$\}$, $C = \{$*Összetett számot dobunk*$\}$, $D = \{$*Páratlant dobunk*$\}$, $E = \{$*100-nál kisebbet dobunk*$\}$, $F = \{3,5$*-öt dobunk*$\}$. *Említettük, hogy a nulla valószínűségű események mindentől függetlenek, így* F *független bármelyik másiktól. Az is könnyen látható, hogy az 1 valószínűségű eseményekre is igaz ez, azaz* E *is független az összestől. A többi pár esetén vizsgáljuk meg a valószínűségeket:*

- $P(AB) = 0 \neq \frac{1}{6}\frac{2}{6}$, *azaz* A *és* B *nem függetlenek.*
- $P(AC) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6}\frac{2}{6}$, *azaz* A *és* C *nem függetlenek.*
- $P(AD) = 0 \neq \frac{1}{6}\frac{3}{6}$, *azaz* A *és* D *nem függetlenek.*
- $P(BC) = \frac{1}{6} \neq \frac{2}{6}\frac{2}{6}$, *azaz* B *és* C *nem függetlenek.*
- $P(BD) = \frac{1}{6} = \frac{2}{6}\frac{3}{6}$, *tehát a* B *és* D *események függetlenek.*
- $P(CD) = 0 \neq \frac{2}{6}\frac{3}{6}$, *azaz* C *és* D *nem függetlenek.*

Vizsgáljuk meg, hogy két esemény függetlensége milyen következményeket von maga után.

12. Tulajdonság(ok). *Tegyük fel, hogy az* A *és* B *események függetlenek. Ekkor igazak az alábbiak:*

1. A *és* $\overline{B}$ *események függetlenek.*
2. $\overline{A}$ *és* B *események függetlenek.*
3. $\overline{A}$ *és* $\overline{B}$ *események függetlenek.*
4. $P(BA) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ *vagy* $P(B) = 0$.

Figyeljük meg, hogy a 4. pontból következik, hogy kizáró események csak akkor lehetnek függetlenek, ha egyikük valószínűsége nulla. Gondoljunk bele, hogy a 4. pont ennél kicsit többet is mond, hiszen lehetséges, hogy $P(BA) = 0$ de az események nem kizáróak.
Például ha a kísérletünk a $(0, 1)$ *intervallumon való véletlen szám választása,* $A = \{$ *0,5-nél nagyobb számot választottam* $\}$ *és* $B = \{\frac{\pi}{4}$ *-et választottam* $\}$, *akkor* A *és* B *nem kizáróak, de a szorzatuk valószínűsége nulla.*

13. Definíció. *Egy* $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R}$ *eseménysorozatra azt mondjuk, hogy* **páronként független***, ha bármely kettő esemény köztük független. Azt mondjuk, hogy egy ilyen sorozat* **teljesen független***, ha bármely* $I \subseteq \{1, 2, ..., n, ...\}$ *indexhalmazra igaz, hogy* $P(\Pi_i A_i) = \Pi_i P(A_i)$*.*

A teljes függetlenségből persze következik a páronkénti, hiszen a kételemű indexhalmazok is indexhalmazok. A másik irány nem teljesül, nézzük erre a következő példát:

Ilyen ellenpéldát egy szabályos kockával nem lehet mutatni, ezért tekintsünk most egy 8 oldalú szabályos 'dobókockát' (dobóoktaéder). Legyenek a következő eseményeink megfigyelhetőek: $A = \{$ *1-et, 2-t, 3-mat vagy 4-et dobunk* $\}$, $B = \{$ *3-mat, 4-et, 5-öt vagy 6-ot dobunk* $\}$ *és* $C = \{$ *1-et,2-t, 5-öt vagy 6-ot dobunk* $\}$*. Mindhárom esemény valószínűsége* $0,5$ *és mindhárom páronkénti metszet valószínűsége* $\frac{1}{4}$*, így könnyen látható, hogy páronként függetlenek. Azonban* $P(ABC) = 0 \neq \frac{1}{8}$*, azaz nem lehetnek teljesen függetlenek. Ugyanez a gondolatmenet eljátszható cinkelt hatoldalú kockával is, ahol az 1,2 és 3 kimenetek valószínűsége* $\frac{1}{4}$*, a három esemény pedig ezen három érték közül kettőt tartalmazó események. Szabályos kockával két dobás esetén is létezik hasonló eseményhármas:* $A = \{$ *elsőre párosat dobunk* $\}$, $B = \{$ *másodikra párosat dobunk* $\}$ *és* $C = \{$ *a két dobás összege páratlan* $\}$*.*

14. Definíció. *Nemcsak eseménypárokra és eseménysorozatokra, de eseményrendszer párra is definiálható a függetlenség. Két* $\mathcal{R}_1$ *és* $\mathcal{R}_2$ **eseményrendszer független***, ha bármely* $A \in \mathcal{R}_1$ *és* $B \in \mathcal{R}_2$ *eseménypár független.*

Legegyszerűbb példaként képzeljünk el két kockadobást (akár feltehetjük, hogy két különböző ember végzi különböző kockával). Korábban láttuk, hogy miként érdemes a megfigyelhető események rendszerét megválasztani, legyen ezek rendszere $\mathcal{R}_1$ *az első dobáshoz és* $\mathcal{R}_2$ *a másikhoz. Ekkor a két rendszer független lesz, hiszen bármely eseményünk amit az első kockadobáson megfigyelhetünk, az független bármelyik eseménytől, amit a második dobáson figyelünk meg.*

15. Tétel. *(Szorzási szabály) Ha* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{R}$ *megfigyelhető események sorozata, és* $P(\Pi_{i=1}^n A_i) > 0$*, akkor:*

$$P(\Pi_{i=1}^n A_i) = P(A_1|\Pi_{i=2}^n A_i)P(A_2|\Pi_{i=3}^n A_i) \cdots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n) =$$

$$= \Pi_{k=1}^n P(A_k|\Pi_{i=k+1}^n A_i)$$

Az utolsó sorba foglalt képlet persze csak akkor működik, ha a nulla elemű szorzatot Ω-nak definiáljuk. Figyeljük meg, hogy a szabály akármilyen sorrendben alkalmazható egy megfelelő sorozatra, és minden esetben más-más szorzatra bomlana a keresett valószínűség.

A szorzás szabály bizonyítása pofonegyszerű, a jobb oldal feltételes valószínűségeit definíció szerint átírva olyan sort kapnánk, ahol az egymást követő törtek számlálója mindig az előzőnek a nevezőjével egyezik meg, így csak a legelső számláló marad meg a leegyszerűsítések után, ami pontosan a teljes eseménysorozat szorzatának a valószínűsége.

Kockadobás esetén vizsgáljuk meg, mit mondana a szorzási szabály az alábbi eseményekre: $A = \{$ 4-nél kisebbet dobunk $\}$, $B = \{$ párosat dobunk $\}$ és $C = \{$ 1-et, 2-t, 5-öt vagy 6-ot dobunk $\}$. Ekkor $P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C) = P(A|$2-t vagy 6-ot dobunk$)\frac{1}{2}\frac{4}{6} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Persze ebben az esetben egyszerűbb a szorzási szabály nélkül megmondani a keresett valószínűséget. Azonban sok esetben könnyebb a feltételes valószínűségeket meghatározni, mint a metszet valószínűségét, ilyenkor érdemes a gyakorlatban a szorzási szabályt alkalmazni.

Tekintsünk egy sokkal bonyolultabb példát, ami azonban jobban szemlélteti, hogy milyen esetekben érdemes a szorzási szabályt használni. Tegyük fel, hogy a király a tisztségét elsőszülött fiára hagyja, amennyiben az megéri a felnőtt kort. A belviszályok miatt amennyiben nem sikerül az elsőszülöttnek átvennie a trónt, akkor puccs következtében megdől a királyság, és demokrácia veszi át a helyét. Azonban a középkori körülmények miatt kezdetben 30% eséllyel nem éri meg egy gyermek a felnőtt kort. A tudomány fejlődésével generációnként 1%-al csökken ez az arány. Tegyük most fel, hogy a felnőtt kort megérő fiúknak mind sikerül (legalább 1) fiút nemzeniük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 generáción keresztül sikerül az elsőszülöttnek örökölnie a trónt?
Ezt a kérdést nem igazán lehetne a szorzási szabályt kikerülve megválaszolni, hiszen nem tudunk a második generációs király gyerekeivel kapcsolatban semmit számolni az a feltevés nélkül, hogy egyáltalán létezett a második generációs király. A szorzási szabályt felhasználva (ahol az A_i esemény, hogy az i-edik generációban sikeres az öröklés) azonban minden tag egyszerűen beírható a képletbe:

$$P(\Pi_{i=1}^{10} A_i) = P(A_{10}|\Pi_{i=1}^{9} A_i)P(A_9|\Pi_{i=1}^{8} A_i)\cdots P(A_2|A_1)P(A_1) =$$

$$= 0,79 \cdot 0,78 \cdot 0,77 \cdot 0,76 \cdot 0,75 \cdot 0,74 \cdot 0,73 \cdot 0,72 \cdot 0,71 \cdot 0,7 \approx 0,052 = 5,2\%.$$

16. Tétel. *(Teljes Valószínűség Tétel) Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R}$ egy teljes eseményrendszer ($\forall i \neq j : A_iA_j = \emptyset$ és $\Sigma_i A_i = \Omega$), amire $\forall i : P(A_i) > 0$. Ekkor tetszőleges B eseményre igaz, hogy:*

$$P(B) = \Sigma_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bizonyítás: A B eseményt felbonthatjuk (szemléletesebben mondva felszeletelhetjük) $B = BA_1 + BA_2 + ...BA_n + ...$ alakban kizáró eseményekre. A valószínűség definíciójának 3. pontja alapján $P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + ...P(BA_n) + ... = \Sigma_i P(BA_i)$. A feltételes valószínűség definíciója alapján átírhatjuk a metszetek valószínűségét: $\Sigma_i P(BA_i) = \Sigma_i P(B|A_i)P(A_i)$, ami pontosan a kívánt formula.

Kockadobás esetén vizsgáljuk meg, mit mondana a teljes valószínűség tétel az alábbi eseményekre: $A_1 = \{$ 3-nál kisebbet dobunk $\}$, $A_2 = \{$ 3-mat vagy 4-et dobunk $\}$, $A_3 = \{$ 5-öt vagy 6-ot dobunk $\}$ és $B = \{$ párosat dobunk $\}$. Ekkor $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Persze ezt az esetet is könnyebb lett volna a teljes valószínűség tétel nélkül meghatározni, de vannak esetek, mikor mégis jobban tesszük, ha használjuk, méghozzá amikor a képlet jobb oldalán szereplő valószínűségeket mind könnyen megtudhatjuk, de a bal oldalt nem.

Ismét nézzünk meg egy bonyolultabb, de szemléletesebb példát is. Tegyük fel, hogy a lakosságban a kék szemért felelős gén aránya 50% (recesszíven öröklődik), és a párválasztás nem függ a szemszíntől. Mi a valószínűsége, hogy egy kék szemű embernek (aki még párválasztás előtt áll) kék szemű gyereke fog születni elsőként.
Legyen a kérdéses esemény B, és A_i legyen az az esemény, hogy a párja i darab kék szem génnel rendelkezik ($i = 0, 1, 2$). Ekkor a képlet valószínűségeit könnyen behelyettesíthetjük (azonban B-ről nem tudnánk nyilatkozni a párja génjeinek ismerete nélkül)

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

17. Tétel. *(Bayes-Tétel) Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{R}$ egy teljes eseményrendszer ($\forall i \neq j : A_iA_j = \emptyset$ és $\Sigma_i A_i = \Omega$), amire $\forall i : P(A_i) > 0$. Ekkor tetszőleges B eseményre, ha $P(B) > 0$, akkor:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\Sigma_j P(B|A_j)P(A_j)}$$

Bizonyítás: A nevezőben a teljes valószínűség tétel jobb oldalát látjuk, azaz egyenlő $P(B)$-vel. Ha ezt beírjuk, és a számláló feltételes valószínűségét definíció szerint átírjuk, akkor azt kapjuk, hogy a jobb oldal:

$$\frac{\frac{P(BA_i)}{P(A_i)}P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(BA_i)}{P(B)}$$

Ez pedig a feltételes valószínűség definíciója alapján pontosan a $P(A_i|B)$, ami a bal oldala a képletnek.

Kockadobás esetén vizsgáljuk meg, mit mondana a Bayes-tétel az előző példában látott eseményekre ($A_1 = \{$ 3-nál kisebbet dobunk $\}$, $A_2 = \{$ 3-mat vagy 4-et dobunk $\}$, $A_3 = \{$ 5-öt vagy 6-ot dobunk $\}$ és $B = \{$ párosat dobunk $\}$).

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Most a nevezőt nem írtuk ki a képlet szerint, azt a részt már amúgy is kiszámoltuk az előző példában. Persze ezt az esetet is könnyebb lett volna a Bayes-tétel nélkül meghatározni, de vannak esetek, mikor mégis jobban tesszük, ha használjuk, méghozzá amikor a képlet jobb oldalán szereplő valószínűségeket mind könnyen megtudhatjuk, de a bal oldalt nem.

Itt is vizsgáljunk egy bonyolultabb, de szemléletesebb példát is. A teljes valószínűség tételnél szereplő példát a kék szeműség öröklődéséről vigyük tovább. Tegyük fel, hogy eltelt 10 év és megtudjuk, hogy a született gyermek kék szemű lett, de nem tudjuk a párjának a szemszínét. Mennyi annak a valószínűsége,

hogy a párja is kék szemű.
A képletbe helyettesítve:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{1\frac{1}{4}}{0\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

4. Klasszikus valószínűség, geometriai valószínűség. Példák az alkalmazásokra: urnamodellek, Buffon-féle tűprobléma.

Gondoljuk végig, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkező valószínűségi mezővel találkozhatunk legtöbbször (és mit tudnánk legegyszerűbben kezelni). A korábban sok példában felmerülő kockadobás kísérletünk jól szemlélteti, hogy az eseménytér végessége, és az elemi események megegyező valószínűsége egyszerűbbé teszi a vizsgálatainkat. A következő definícióval ennek adunk nevet.

18. Definíció. *A* **klasszikus valószínűségi mező** *egy olyan valószínűségi mező, aminek az eseménytere véges, és az elemi események valószínűsége megegyezik.*

Könnyen belátható, hogy véges eseménytéren értelmezett σ-algebra egyértelmű (Ω minden részhalmaza megfigyelhető kell legyen).

19. Tulajdonság(ok). *Az n elemű eseménytér feletti klasszikus valószínűségi mezőkben a valószínűségek egyszerű képlet segítségével számíthatók:*

- *Az elemi események valószínűsége $\frac{1}{n}$.*
- *Egy k darab elemi eseményt tartalmazó esemény valószínűsége $\frac{k}{n}$.*

Bizonyítsuk be a fenti két tulajdonságot! A valószínűség definíció szerint kizáró események összege esetén megegyezik az események valószínűségének összegével. Ez alapján az elemi események valószínűségeinek összege véges esetben 1 kell legyen. Ha pedig n elemi eseményünk van, és ezek valószínűsége megegyezik, akkor ez pontosan az első tulajdonságot eredményezi. A második tulajdonsághoz ismét felhasználjuk a valószínűség kizáró eseményekre vonatkozó tulajdonságát, mégpedig elemi eseményekre bontjuk a kérdéses eseményünket. Mivel ezek valószínűsége $\frac{1}{n}$, és pontosan k darab van belőlük, így az esemény valószínűségét adó összeg $\frac{k}{n}$ lesz.

A második tulajdonság képletét sokszor úgy szoktuk emlegetni, mint a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa:

$$\frac{\textbf{\textit{kedvező esetek}}}{\textbf{\textit{összes eset}}}$$

Kockadobásos példáinkban már korábban is felhasználtuk a most leírtakat. Mivel a szabályos kockadobás kísérlete klasszikus valószínűségi mezővel modellezhető, ahol 6 elemi eseményünk van, így egy esemény valószínűsége mindig $\frac{1}{6}$ szorozva a kedvező esetek számával. Számoljuk ki a következő események valószínűségét: $A = \{$4-et dobunk$\}$, $B = \{$4-et vagy 6-ot dobunk$\}$, $C = \{$3-nál nagyobbat dobunk$\}$, $D = \{$Páratlant dobunk$\}$, $E = \{$100-nál kisebbet dobunk$\}$, $F = \{3,5$-öt dobunk$\}$
$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(E) = \frac{6}{6} = 1$ *és* $P(F) = \frac{0}{6} = 0$.

20. Definíció. *Amennyiben a lehetséges kimenetelek halmaza egy n-dimenziós geometriai alakzatot alkot, és egyenletesen oszlik el rajta a valószínűség, akkor* **geometriai valószínűségi mezőről** *beszélünk. Ilyen esetben egy A esemény valószínűségét a benne foglalt elemi események alkotta térrész n-dimenziós térfogatának, és az összes elemi esemény n-dimenziós térfogatának arányaként számíthatjuk ki. Azaz $P(A) = \frac{V_n(A)}{V_n(\Omega)}$.*

Ne zavarjon meg minket az n-dimenzió, $n = 1$ esetén a hosszok aránya, $n = 2$ esetén területek aránya, $n = 3$ esetén térfogatok aránya adja meg a valószínűséget.

Figyeljük meg, hogy a geometriai valószínűségi mező hasonlít a klasszikushoz az egyenletességében, de az elemi események száma végesről végtelenre ugrik (sőt, legtöbb esetben kontinuumra).

Tekintsük a $(0,1)$ intervallumról való véletlen szám választása kísérletet. Ez egy geometriai valószínűségi mezőt definiál, ahol például annak a valószínűsége, hogy a húzott szám az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervallumba esik, a fenti képlet alapján $\frac{\frac{1}{3}}{1}$, azaz $\frac{1}{3}$.

Ha egy egységnégyzeten választok egyenletesen pontot, akkor is geometriai valószínűségi mezőről beszélhetünk, csak ez már két dimenziós térben helyezkedik el. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a középponttól legfeljebb $\frac{1}{2}$ távolságra esik a választott pont? A kedvező kimenetelek halmaza egy kört fog alkotni a négyzet közepén (és nem lóg ki a négyzetből). A keresett valószínűség a fenti képlet alapján tehát a területek arányával számolható: $\frac{0,5^2\pi}{1}$ ami nagyjából $0,785$. A magasabb dimenziós esetek néha több alacsonyabb dimenziós esetből származtathatók. Ezt a példát definiálhattuk volna úgy is, hogy választunk két x, y pontot egyenletesen a $(0,1)$ intervallumról, és a koordinátarendszeren az (x, y) pontnak vizsgáljuk az elhelyezkedését.

Válasszunk most három x, y, z pontot egyenletesen a $(0,2)$ intervallumról. Mi annak a valószínűsége, hogy a harmadik nagyobb lesz mint a másik kettő összege ($z > x+y$). Ez a feladat egy kockán értelmezett geometriai valószínűségi mezővel modellezhető. A kérdéses esemény egy szabályos gúlának felel meg (tetraéder is, de nem szabályos tetraéder), aminek egyik csúcsa a $(0,0,2)$ a többi csúcsa pedig ennek a csúcsnak a szomszédai (él mentén). A gúla térfogata $\frac{1}{3}T_h m$, ahol T_h az alap területe, m pedig a gúla magassága. Tetszőlegesen megválaszthatjuk melyik lapot tekintjük alapnak, célszerű a kocka egyik oldalára esőt választani.

Ekkor ennek a (derékszögű) háromszögnek a területe $2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$*. A gúlának a háromszöggel szemközti csúcsból induló magasságvonala pont a kocka egy éle lesz, azaz a hossza* 2*. A gúla térfogata tehát* $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$*. A keresett valószínűség a térfogatok arányából megkapható:* $\frac{\frac{4}{3}}{8} = \frac{1}{6}$ *(hiszen most a teljes eseménytér térfogata* $2^3 = 8$*).*

4.1. Urnamodellek

Valószínűségszámítási példákat gyakran definiálunk urnából való húzással illetve húzás sorozattal. Egy egyszerű esetként végiggondolhatjuk, hogy a szabályos kockadobás ekvivalens azzal a kísérlettel, ahol egy urnából 1-től 6-ig számozott hat darab gólyó közül húzunk ki egyet. Általánosan úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy urnába különböző tulajdonságokkal rendelkező golyókat teszünk (de persze lehet két golyó azonos tulajdonságú is), majd néhányat kihúzunk. Az urnamodellek esetén tipikusan a kihúzott eredmény alapján valamit módosítunk az urnán (azaz nem feltétlen tesszük vissza az összes kihúzottat, vagy akár új golyókat teszünk az urnába), és így végezzük el a következő húzást. Az egyes húzások kísérlete klasszikus valószínűségi mezőt alkot, a húzások sorozatából álló kísérleten értelmezett események valószínűségeit pedig feltételes valószínűség segítségével lehet számolni.

A Pólya-féle urnamodellben kezdetben két golyó van az urnában, legyen piros és zöld, és minden húzás után a kihúzott golyóval együtt még egy ugyanolyan színűt beleteszünk az urnába. A modell érdekessége, hogy ha $(n-2)$ *alkalommal megismételjük a húzás és bővítés procedúráját, a kapott urna ugyanolyan valószínűséggel lesz bármilyen összetételű. Máshogy fogalmazva, amikor* n *golyó van az urnában, akkor az urnában lévő piros golyók száma klasszikus valószínűségi mezővel modellezhető (a lehetséges kimenetek:* $1, 2, \ldots, n-1$*). Számoljuk ki elsőként a második lépés utáni valószínűségeket. Használjuk a teljes valószínűség tételét arra, hogy a második húzás utáni állapotban 2 piros van (az* $i = p$ *jelölés azt az eseményt jelöli, hogy az* i*-edik húzás piros lesz):* $P(\textit{2 piros}) = P(\textit{2 piros}|1 = p)P(1 = p) + P(\textit{2 piros}|1 = z)P(1 = z) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$*. A másik két esetről ({1 piros} és {3 piros}) pedig a szimmetria miatt látható, hogy azonos az esélyük, valószínűségük összege pedig* $1 - \frac{1}{3}$*, azaz valóban mindhárom eset valószínűsége* $\frac{1}{3}$*.*

Teljes indukció segítségével nézzük meg, hogy ha egy n *értékre már tudjuk, hogy az* $1, 2..., n+1$ *kimenetek egyformán valószínűek az* n*-edik húzás után a pirosak számára, akkor mit mondhatunk az* $n+1$*-edik húzás utáni állapotról. A teljes valószínűségi tétel segítségével felírhatjuk az* $n+1$*-edik húzás után, hogy egy* $1 < k < n+2$ *számra mi a valószínűsége annak, hogy* k *darab piros golyó van az urnában. Az* $\{n \to k\}$ *jelölje azt az esemény, hogy az* n*-edik húzás után pontosan* k *piros gólyó van az urnában. Figyeljük meg, hogy az indukciós feltevésből következik, hogy* $P(n \to k) = \frac{1}{n+1}$*.*

$$P(n+1 \to k) = P(n+1 \to k|n \to k-1)P(n \to k-1) + P(n+1 \to k|n \to k)P(n \to k) =$$
$$= \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{k-1+n+2-k}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.$$

A teljes valószínűségi tételnél a teljes eseményrendszer persze nem kételemű, de a fenti kettőn kívül minden más esetben nulla lenne a feltételes valószínűsége a k pirosat tartalmazó eredménynek, így ezeket kihagyhattuk.

4.2. Buffon-féle tűprobléma

Egy tipikus alkalmazása a geometriai valószínűségi mezőnek, amikor egy test vagy alakzat elhelyezkedése (iránya) véletlenszerű. Ilyenkor egy alapvonallal bezárt szöget választjuk a változónknak, erre már könnyen látszik, hogy egy intervallumon való geometriai valószínűségi mező írja le a viselkedését. Három dimenziós esetben hasonlóhoz már két szögre lesz szükségünk, gondoljunk csak a Föld felszínén való hosszúsági és szélességi fok párosra.

Egyik legnevezetesebb ilyen példa a Buffon-féle tűprobléma. Tegyük fel, hogy egy síklapra ejtünk egy $h < 1$ hosszúságú tűt (ami persze fekve találja meg egyensúlyi állapotát, így h hosszú intervallumként tekintünk rá). A síklap párhuzamos egyenesekkel csíkokra van tagolva, ahol a szomszédos egyenesek pontosan egységnyi távolságra vannak egymástól. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

A válaszhoz megfelelő valószínűségi mezőt kell találnunk. A tű és az egyenesek által bezárt hegyesszögre vezetünk be egy α változót, ekkor feltehetjük, hogy $\alpha \in [0°, 90°]$, avagy radiánban mérve $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ezen felül a tű középpontjának és a legközelebbi egyenesnek a távolságát jelöljük d-vel. Ekkor $d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ szintén geometriai valószínűségi mezővel modellezhető. A két változónk együtt tehát egy téglalapon való geometriai valószínűségi mezőt alkot. Vizsgáljuk meg a kedvező esetek elhelyezkedését a téglalapon. Vetítsük le merőlegesen a tű középpontját a legközelebbi egyenesre, és tekintsük a keletkező derékszögű háromszöget (a vetítő vonal, az egyenes és a tű egyenese között). Ebből leolvasható egy szinusz szögfüggvény felírásából, hogy pontosan akkor fog a tű metszeni egyenest, ha $d \leq \frac{h}{2} sin(\alpha)$. A görbe alatti területet integrálással tudjuk meghatározni:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{2} sin(\alpha) d\alpha = \left[-\frac{h}{2} cos(\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{h}{2}(0-1) = \frac{h}{2}.$$

Így a keresett valószínűség ennek az értéknek és a téglalap területének hányadosa:

$$\frac{\frac{h}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2h}{\pi}.$$