Valószínűségszámítás pótpótzárthelyi
A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A feladatokra minden esetben számszerű megoldást várunk (4 tizedesjegyig kerekítsünk). A megoldáshoz a megoldás menetét részletesen le kell írni, és az egyes lépéseknél jelezni, hogy milyen tulajdonságok miatt tehetjük azt meg. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. A három fajta járművet gyárt a DepCS: tankot, tengeralattjárót és drónt. ötször annyi drónt gyárt mint tengeralattjárót, és négyszer annyit mint ahány tankot. A vezérlés mindháromban egyforma. A tankok közül minden ötödik felhevíti a vezérlést, a drónok közül minden harmadik, a tengeralattjárók közül minden második. Véletlenszerűen kijelölve egy vezérlést a gyártósoron, mi a valószínűsége annak, hogy azt fel fogja hevíteni a járműve? Ha tudjuk, hogy felhevítette a járműve, akkor mi a valószínűsége, hogy tankba lett beszerelve?

   (3pont) $P(D) = 5P(Te), P(D) = 4P(Ta)$.
   (2 pont) $1 = P(D + Ta + Te) = P(D) + P(Ta) + P(Te) = P(D) + \frac{1}{4}P(D) + \frac{1}{5}P(D) = \frac{29}{20}P(D)$.
   (2pont) $P(D) = \frac{20}{29}; P(Te) = \frac{4}{29}; P(Ta) = \frac{5}{29}$.
   (3pont) $P(H|D) = \frac{1}{3}; P(H|Te) = 0{,}5; P(H|Ta) = 0{,}2$.
   (4pont) TVT: $P(H) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{29} + 0{,}5 \cdot \frac{4}{29} + 0{,}2 \cdot \frac{5}{29}$
   (1pont) $= \frac{20+6+3}{3 \cdot 29} = \frac{1}{3}$
   (3pont) Bayes-tétel: $P(Ta|H) = \frac{P(H|Ta)P(Ta)}{P(H)} =$
   (2pont) $= \frac{\frac{1}{29}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{29} \approx 0{,}10345$

2. Az emberek 20%-a fertőzött a lappangó zombi vírussal. Ha egy k fertőzöttből álló izolált csoportot megfigyelnek, akkor az első átváltozás ideje örökifjú tulajdonságú (folytonos), $\frac{8}{k}$ óra várható értékkel. Egy tengerparti faluban 4 ember reked egy házban: 3 fertőzött és 1, akiről nem tudni, hogy fertőzött-e. Mi a valószínűsége annak, hogy 2 óra alatt egyikük sem változik át?

   (1pont) A= 2 óra alatt egyik sem változik át; $P(A) =?$
   (2pont) $F_4 = 4$ fertőzött a 4-ből; $F_3 = 3$ fertőzött.
   (2pont) $P(F_4) = \frac{1}{5}$; $P(F_3) = \frac{4}{5}$.
   (1pont) F_4, F_3 Teljes eseményrendszer.
   (2pont) Teljes valószínűség tétel értelmében:
   (2pont) $P(A) = P(A|F_4)P(F_4) + P(A|F_3)P(F_3)$
   (3 pont) Az első átváltozás ideje exponenciális eloszlású.
   (2pont) Ha i fertőzött van, akkor $X_i \in Exp(\frac{i}{8})$ eloszlású az első átváltozás ideje.
   (2pont) $P(A|F_i) = 1 - P(X_i < 2) = e^{-2\frac{i}{8}} = e^{-\frac{i}{4}}$
   (2pont) $P(A) = e^{-1}\frac{1}{5} + e^{-\frac{3}{4}}\frac{4}{5}$
   (1pont) $P(A) \approx 0{,}45147$

3. A VIK-es hallgatók testmagasságát elemzik. A mért értékek normális eloszlást követnek, átlaguk 175cm. A 170 centiméternél alacsonyabbak aránya 20%. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák magassága 180cm és 185cm közé esik?

   (2pont) $X \in N(175, \sigma)$
   (2pont) $P(X < 170) = 0{,}2$
   (3pont) $F_X(170) = \Phi(\frac{170-175}{\sigma}) = 0{,}2$
   (3pont) $\Phi(0{,}84) = 0{,}8$, azaz $\Phi(-0{,}84) = 0{,}2$
   (2pont) $\sigma = 5{,}9524$
   (2pont) $P(180 < X < 185) =?$
   (2pont) $P(180 < X < 185) = \Phi(\frac{10}{5{,}9524}) - \Phi(\frac{5}{5{,}9524}) =$
   (1pont) $= \Phi(1{,}68) - 0{,}8$
   (1pont) Mert $\Phi(\frac{5}{5{,}9524}) = 1 - \Phi(\frac{170-175}{\sigma}) = 0{,}8$.
   (2pont) $P(180 < X < 185) \approx 0{,}9535 - 0{,}8 = 0{,}1535$

4. A kapitány megfigyelte, hogy a halászhajóján az egy nap alatt fogott cápák számának átlaga 2. Feltehetjük, hogy az óceánban rengeteg cápa él, és mindegyik egyforma valószínűséggel lesz kifogva egy nap alatt, egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy holnap kevesebb mint 2 cápát fog kifogni?

   (5pont) 1 nap alatt fogott cápák száma $X \in Poi(\lambda)$
   (3pont) $EX = 2$ így $\lambda = 2$.
   (2pont) $P(X < 2) =?$.
   (4pont) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
   (2pont) $P(X = 0) = e^{-2}$
   (2pont) $P(X = 1) = 2e^{-2}$
   (2pont) $P(X < 2) = 3e^{-2} \approx 0{,}406$

5. Ha András egy 10 centi hosszú gyufaszálat eltör, a töréspont sűrűségfüggvénye $f_x(x) = \frac{3}{250}(5-x)^2$ (ahol $0 < x < 10$). Bíbor fogadásra biztatja: lemérik, hogy a töréspont milyen messzire esik a bot felezőpontjától, és ennek az a értéknek

Bíbor kifizeti a négyzetét Andrásnak, míg ezzel egy időben András fizet a-t Bíbornak. Mi lesz András nyereségének várható értéke a gyufa eltörése esetén?

(3pont) A felezőponttól való eltérés hossza $|X-5|$.
(3pont) András nyeresége $Y = |X-5|^2 - |X-5|$.
(4pont) $E\left(|X-5|^2 - |X-5|\right) = \int_0^{10}\left(|x-5|^2 - |x-5|\right)\frac{3}{250}(5-x)^2dx =$
(2pont) $= \frac{3}{250}\int_0^5\left((5-x)^2 + x - 5\right)(5-x)^2dx + \frac{3}{250}\int_5^{10}\left((x-5)^2 - x + 5\right)(5-x)^2dx =$
(2pont) $= \frac{3}{250}\int_0^5 (5-x)^4 - (5-x)^3dx + \frac{3}{250}\int_5^{10}(x-5)^4 + (5-x)^3dx =$
(2pont) $= \frac{3}{250}\left(\frac{1}{5}\left[-(5-x)^5\right]_0^{10} + \frac{1}{4}\left[(5-x)^4\right]_0^5 + \frac{1}{4}\left[-(5-x)^4\right]_5^{10}\right) =$
(2pont) $= \frac{3}{250}\left(\frac{1}{5}\left(5^5+5^5\right) + \frac{1}{4}\left(-5^4\right) + \frac{1}{4}\left(-5^4\right)\right) =$
(2pont) $= \frac{3}{250}\frac{3}{2}\left(5^4\right) = \frac{5\cdot 9}{4} = 11{,}25$

6. Addig húzunk visszatevéssel a 32 lapos magyarkártya csomagból, amíg a húzott lapok között megjelenik az alsó-felső-király-ász részsorozat (ebben a sorrendben, de nem feltétlenül egymás után; a szín nem számít, azaz vegyes színű is lehet a sorozat). Mennyi lesz a húzások számának várható értéke?

   (6pont) A kísérlet ekvivalens módon úgy is fogalmazható, hogy húzok az első alsóig, folytatom az az utáni első felsőig, folytatom az az utáni első királyig, és végül az ez utáni első ászig.
   (4pont) A négy valószínűségi változó (a négy diszjunkt húzássorozat hosszára) geometriai eloszlású: $X_1, X_2, X_3, X_4 \in G(\frac{1}{8})$
   (3pont) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) =?$
   (2pont) $E(X_i) = 8$
   (3pont) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) =$
   (2pont) $= 8 + 8 + 8 + 8 = 32$