Valószínűségszámítás pótzárthelyi
A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A feladatokra minden esetben számszerű megoldást várunk (4 tizedesjegyig kerekítsünk). A megoldáshoz a megoldás menetét részletesen le kell írni, és az egyes lépéseknél jelezni, hogy milyen tulajdonságok miatt tehetjük azt meg. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. A lakosságban minden 4-edik ember refluxos, minden harmadik allergiás, és minden tizedik informatikus. Adjunk 0-nál nagyobb alsó becslést annak a valószínűségére, hogy egy véletlenszerűen választott ember egyik tulajdonsággal sem rendelkezik a három közül! Ha kiderülne, hogy a három tulajdonság egymástól teljesen független, akkor mit mondhatnánk ugyanerről a valószínűségről?

   (2pont) $P(R) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(I) = 0{,}1.$
   (2pont) $P(E) \geq ?$, ahol E=egyik sem.
   (2pont) $E = \overline{R + A + I}$
   (3pont) $P(R + A + I) \leq P(R) + P(A) + P(I) = \frac{41}{60}$ (szubadditivitás)
   (1pont) $P(E) = 1 - P(R + A + I)$
   (1pont) $P(E) \geq 1 - \frac{41}{60} = \frac{19}{60} = 0{,}316666$
   (4pont) $P(E) = P(\overline{R} \cdot \overline{A} \cdot \overline{I})$ De Morgan azonosság
   (3pont) függetlenség miatt: $P(E) = P(\overline{R})P(\overline{A})P(\overline{I})$
   (1pont) $P(\overline{R}) = \frac{3}{4}, P(\overline{A}) = \frac{2}{3}, P(\overline{I}) = 0{,}9.$
   (1pont) $P(E) = \frac{54}{120} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

2. Az emberek 20%-a fertőzött a lappangó zombi vírussal. Ha egy k fertőzöttből álló izolált csoportot megfigyelnek, akkor az első átváltozás ideje örökifjú tulajdonságú (folytonos), $\frac{30}{k}$ óra várható értékkel. Egy tengerparti faluban 3 idegen ember egy helyen talál menedéket. Mi a valószínűsége annak, hogy 20 óra alatt egyikük sem változik át?

   (1pont) A= 20 óra alatt egyik sem változik át; $P(A) =?$
   (2pont) $F_0 = 0$ fertőzött a 3-ból; $F_1 = 1$ fertőzött; $F_2 = 2$ fertőzött; $F_3 = 3$ fertőzött.
   (1pont) F_0, F_1, F_2, F_3 Teljes eseményrendszer.
   (1pont) Teljes valószínűség tétel értelmében:
   (2pont) $P(A) = P(A|F_0)P(F_0) + P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)$
   (1pont) Az F_i lehetőségek pontosan binomiális eloszlásúak, $n = 3$ és $p = 0{,}2$.
   (2pont) $P(F_0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3; P(F_1) = 3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2; P(F_2) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right); P(F_3) = \left(\frac{1}{5}\right)^3$
   (1pont) $P(A|F_0) = 1$
   (4pont) Ha i fertőzött van, akkor $X_i \in Exp(\frac{i}{30})$ eloszlású az első átváltozás ideje.
   (2pont) $P(A|F_i) = 1 - P(X_i < 20) = e^{-20\frac{i}{30}} = e^{-\frac{2 \cdot i}{3}}$
   (2pont) $P(A) = 1\left(\frac{4}{5}\right)^3 + e^{-\frac{2}{3}}3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2 + e^{-\frac{4}{3}}3\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right) + e^{-\frac{6}{3}}\left(\frac{1}{5}\right)^3$
   (1pont) $P(A) \approx 0{,}73554018123$

3. Különböző vírusokat vizsgálnak egy laborban. Egy Z vírus hosszának eloszlását akarják megállapítani. A hossz normális eloszlású, 1000 nanométer várható értékkel. A mérések 10%-ában láttak 1100 nanométernél hosszabb egyedeket. Sikeresen kifejlesztettek egy antitestet, ami a 200 nanométernél nagyobb vírusokat elpusztítja, de az annál kisebbekre hatástalan. Hány százalékát pusztítja el a víruspopulációnak ez a fajta antitest?

   (1pont) $Z \in N(1000, \sigma)$
   (2pont) $P(Z > 1100) = 0{,}1$
   (1pont) $P(Z < 1100) = 0{,}9$ (hiszen folytonos eloszlás)
   (3pont) $0{,}9 = P(Z - 1000 < 100) = P(\frac{Z-1000}{\sigma} < \frac{100}{\sigma}) = \Phi(\frac{100}{\sigma})$
   (2pont) Táblázatból: $\Phi(1{,}28) \approx 0{,}9$
   (2pont) $\frac{100}{\sigma} = 1{,}28$
   (1pont) $\sigma = \frac{10000}{128} \approx 78{,}125$
   (2pont) $P(Z > 200) =?$
   (2pont) $P(Z > 200) = P(Z < 1800)$ a szimmetria miatt (és folytonosság)
   (2pont) $P(Z < 1800) = P(\frac{Z-1000}{78{,}125} < \frac{800}{78{,}125}) = \Phi(10{,}24)$
   (2pont) $P(Z > 200) = \Phi(10{,}24) > 0{,}9999$

4. A kapitány megfigyelte, hogy a halászhajóján az egy nap alatt fogott halak összsúlyának átlaga 150 kg, szórása pedig 30. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a 250 kg-os haltartály megtelik holnap kevesebb mint 10%.

   (Markovos megoldás abban az esetben, ha Csebisevről egyáltalán nincs szó, akkor 5 pontot érhet, ha levezeti a $\frac{3}{5}$ becslést, és látja, hogy ez nem elég.)
   (4pont) Csebisev egyenlőtlenség: $P(|X - EX| \geq t) \leq \frac{\sigma^2 X}{t^2}$
   (2pont) Ha X az egynapi halfogás összsúlya, akkor $EX = 150$, $\sigma^2 X = 900$.
   (3pont) $P(X \geq 250) =?$
   (2pont) $P(X \geq 250) = P(X - EX \geq 100)$
   (4pont) $P(X - EX \geq 100) < P(|X - EX| \geq 100)$
   (3pont) $P(|X - EX| \geq 100) \leq \frac{900}{10000}$

(2pont) $P(X \geq 250) \leq 0{,}09$

5. Ha András egy 6 centi hosszú gyufaszálat eltör, a töréspont egyenletesen helyezkedhet el a bot középső harmadán. Bíbor fogadásra biztatja: minden gyufa eltörése után András fizet Bíbornak a rövidebbik darab hosszával megegyező pénzt, és Bíbor fizet Andrásnak a hosszabbik darab hosszának felének négyzetével megegyező pénzt. Mi lesz András nyereségének várható értéke és szórása egy gyufa eltörése esetén?

   (3pont) A rövidebbik darab hosszának eloszlása a szimmetria miatt $X \in U(2,3)$.
   (1pont) A sűrűségfüggvény $f_X = 1$ ahol $x \in (2,3)$
   (2pont) A Bíbor által fizetett összeg $\left(\frac{6-X}{2}\right)^2$
   (2pont) András nyeresége $Y = \left(\frac{6-X}{2}\right)^2 - X$
   (2pont) $E\left(\left(\frac{6-X}{2}\right)^2 - X\right) = \int_2^3 \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 - x dx =$
   (1pont) $= \int_2^3 9 - 4x + \frac{x^2}{4} dx = \left[9x - 2x^2 + \frac{x^3}{12}\right]_2^3 =$
   (1pont) $= 9(3-2) - 2(9-4) + \frac{27-8}{12} = \frac{7}{12} = 0{,}58333$
   (1pont) Steiner-formula: $\sigma^2 Y = E(Y^2) - (EY)^2$
   (2pont) $E(Y^2) = \int_2^3 \left(9 - 4x + \frac{x^2}{4}\right)^2 dx =$
   (1pont) $= \int_2^3 81 + 16x^2 + \frac{x^4}{16} - 72x - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 dx =$
   (1pont) $= \left[81x + \frac{41}{6}x^3 + \frac{x^5}{80} - 36x^2 - \frac{1}{2}x^4\right]_2^3 =$
   (1pont) $= 81(3-2) + \frac{41}{6}(27-8) + \frac{243-32}{80} - 36(9-4) - \frac{1}{2}(81-16) =$
   (1pont) $= 81 + \frac{779}{6} + \frac{211}{80} - 180 - \frac{65}{2} = 0{,}9708333$
   (1pont) $\sigma^2 Y = 0{,}9708333 - 0{,}340277 = 0{,}630555$

6. IMSC* Addig dobunk szabályos kockával, amíg a dobott értékek között megjelenik az $1, 2, 3$ részsorozat (ebben a sorrendben, de nem feltétlenül egymás után). Mennyi lesz a dobások számának várható értéke?

   (6pont) A kísérlet ekvivalens módon úgy is fogalmazható, hogy dobok az első 1-esig, folytatom az az utáni első 2-esig, és végül az ez utáni első 3-asig.
   (4pont) A három valószínűségi változó (a három diszjunkt dobássorozat hosszára) geometriai eloszlású: $X_1, X_2, X_3 \in G(\frac{1}{6})$
   (3pont) $E(X_1 + X_2 + X_3) = ?$
   (2pont) $E(X_i) = 6$
   (3pont) $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) =$
   (2pont) $= 6 + 6 + 6 = 18$