Valószínűségszámítás zárthelyi
A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A feladatokra minden esetben számszerű megoldást várunk (4 tizedesjegyig kerekítsünk). A megoldáshoz a megoldás menetét részletesen le kell írni, és az egyes lépéseknél jelezni, hogy milyen tulajdonságok miatt tehetjük azt meg. A zárthelyi első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. A BME-VIK-en három fajta alapképzést indítanak: V, M és E. V-re fele annyi hallgatót vesznek fel, mint M-re, de dupla annyit mint E-re. A V-re felvettek közül 10%-nak magasabb a felvételi pontszáma mint 400, Az M-esek között ez az arány 20%, az E-sek között pedig 5%. Ha egy véletlenszerűen választott VIK hallgatóról tudjuk, hogy nem volt több a pontszáma mint 400, akkor mi a valószínűsége, hogy E szakos?

   (3pont) $P(M) = 2P(V), P(V) = 2P(E).1 = P(M + V + E) = 7P(E)$.
   (2pont) $P(M) = 57{,}14\%; P(V) = 28{,}57\%; P(E) = 14{,}29\%$.
   (3pont) $P(> 400|M) = 0,2; P(> 400|V) = 0,1; P(> 400|E) = 0{,}05$.
   (2pont) $P(E|Komp(> 400)) =?$
   (5pont) Bayes-tétel
   (5pont) behelyettesítés és kiszámítás: $\frac{0{,}135755}{0{,}85} = 0{,}1597 \approx 16\%$

2. A SZITPhone telefonok első meghibásodásának ideje örökifjú tulajdonságú, és várhatóan 2 év telik el egy új telefon első meghibásodásáig. A telefonok egymástól függetlenül romlanak el. 5 jóbarát egyszerre vett új SZITPhone telefont. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan hármójuknak kell majd szervízhez fordulni a 4. év végéig?

   (3pont) folytonos+örökifjú => Exponenciális eloszlású.
   (2pont) $EX = 2$ azaz $\lambda = \frac{1}{2}$
   (2 pont) $P(X < 4) =?$
   (4pont) $P(X < 4) = 1 - e^{-\frac{1}{2}4} = 1 - e^{-2} = 0,8647$
   (4pont) $Y \in Bin(5, 0{,}8647)$
   (2pont) $P(Y = 3) =?$
   (3pont) $P(Y = 3) = 0{,}1184$

3. Kínában a férfiak testmagasságát 20 éves korukban vezetik be a központi rendszerbe. A mért értékek normális eloszlást követnek, átlaguk 170cm. A 160 centiméternél alacsonyabbak aránya 5%. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy most született gyermeket majd 170cm és 175cm közé mérnek amikor eljön az ideje?

   (2pont) $X \in N(170, \sigma)$
   (2pont) $P(X < 160) = 0{,}05$
   (3pont) $F_X(160) = \Phi(\frac{160-170}{\sigma})$
   (4pont) $\Phi(1{,}645) = 0{,}95$, azaz $\Phi(-1{,}645) = 0{,}05$
   (2pont) $\sigma = 6{,}079$
   (2pont) $P(170 < X < 175) =?$
   (2pont) $P(170 < X < 175) = \Phi(\frac{5}{6{,}079}) - \Phi(\frac{0}{6{,}079}) =$
   (1pont) $= \Phi(0{,}8225) - \frac{1}{2}$
   (2pont) $\approx 0{,}794 - \frac{1}{2} = 0{,}294$

4. Andrásnak van két botja, az egyik 10cm a másik 20cm hosszú. Fogadásból eltöri a hosszabbikat (a töréspont egyenletesen helyezkedhet el a bot teljes hosszán). András fizet Bíbornak 100 forintot, ha nem lehetséges a keletkező három botból háromszöget alkotni, ellenben Bíbor fizet Andrásnak 50 forintot. Mennyi András nyereségének várható értéke és szórása?

   (1pont) $X \in U(0, 20)$
   (4pont) $P(A) = P(X + 10 > 20 - X, 20 - X + 10 > X)$, (A= {A nyer})
   (2pont) $P(A) = P(5 < X < 15)$
   (2pont) $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
   (1pont) $P(B) = \frac{1}{2}$
   (3pont) $EY = \frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}(-100) = -25$
   (3pont) $EY^2 = \frac{1}{2}2500 + \frac{1}{2}(10000) = 6250$
   (3pont) Steiner-formula: $\sigma^2 Y = EY^2 - (EY)^2 = 6250 - 625 = 5625$
   (1pont) $\sigma = 75$

5. Magyarország 10 millió lakosa közül ötezernek van saját repülőgépe. Adjunk minél élesebb felső becslést annak a valószínűségére, hogy ezerszer véletlenszerűen választva egy magyart, legalább tízszer választottunk olyat, akinek van saját repülője.

   (2pont) $P(Rep) = \frac{5000}{10000000} = 0{,}0005$
   (3pont) $X \in Bin(1000, 0{,}0005)$
   (2pont) $EX = 0{,}5$
   (3pont) becsléshez Markov vagy Csebisev:
   Markov:
   (3pont) $P(X \geq 10) \leq \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$
   Csebisev:
   (3pont) $P(X \geq 10) = P(|X - 0{,}5| \geq 9{,}5)$
   (1pont) $\sigma^2 X = 1000 \cdot 0{,}0005 \cdot 0{,}9995 = 0{,}49975$
   (2pont) $P(|X - 0{,}5| \geq 9{,}5) \leq \frac{0{,}49975}{9{,}5^2} \approx 0{,}0055$

(1pont) Azaz az élesebb becslés 0,0055

6. IMSC* András és Bíbor gyakran úsznak egy nagy tóban amiben rengeteg a hal. Andrást jobban szeretik a halak, őt egy óra alatt 50% valószínűséggel legalább egy hal megkóstolja, míg Bíbort ugyanennyi idő alatt csak 20% eséllyel csípi meg hal (a halak egymástól függetlenül kóstolnak meg, egyforma, de nagyon pici valószínűséggel). Egy óra úszás közben független a csípések száma attól, hogy mióta tartózkodunk már a vízben. Ma András két órát lesz a tóban, míg Bíbor 4 órán keresztül szeretne úszni. Várhatóan ketten együtt hány halharapást élnek majd át?

   (4pont) 1 óra alatti csípések száma $X_A \in Poi(\lambda_A), X_B \in Poi(\lambda_B)$
   (2pont) $P(X_A \geq 1) = 0{,}5$; $P(X_B \geq 1) = 0{,}2$
   (1pont) $P(X_A = 0) = 0{,}5$; $P(X_B = 0) = 0{,}8$
   (2pont) $e^{-\lambda_A} = 0{,}5$; $e^{-\lambda_B} = 0{,}8$
   (1pont) $\lambda_A = 0{,}6931$, $\lambda_B = 0,2231$
   (1pont) $EX_A = 0{,}6931$, $EX_B = 0,2231$
   (4pont) $? = E(X_{A,1} + X_{A,2} + X_{B,1} + X_{B,2} + X_{B,3} + X_{B,4})$, ahol $X_{A,i} \in Poi(0{,}6931)$ és $X_{B,i} \in Poi(0{,}2231)$
   (4pont) várható érték összegre szétesik: $? = EX_{A,1} + EX_{A,2} + EX_{B,1} + EX_{B,2} + EX_{B,3} + EX_{B,4}$
   (1pont) $? \approx 2 \cdot 0{,}6931 + 4 \cdot 0{,}2231 = 1{,}3862 + 0{,}8924 = 2{,}2786$