1. A vizsgázók közül minden negyedik hallgatta már korábban a tárgyat, minden negyedik negyedéves, és minden második át fog menni. A sikeres vizsga tétele független a másik két tulajdonságtól. Adjunk 0-nál nagyobb alsó becslést arra, hogy véletlenszerűen választott vizsgázó nem hallgatta még a tárgyat, nem negyedéves és megbukik. Mennyi lenne ez a valószínűség, ha mindegyik tulajdonságról tudnánk, hogy teljesen függetlenek?

   (1pont) $P(H) = \frac{1}{4}$, $P(N) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{2}$
   (2pont) $P(\overline{H} \cdot \overline{N} \cdot \overline{A}) \geq ?$
   (2pont) $P(\overline{H}) = \frac{3}{4}$, $P(\overline{N}) = \frac{3}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$
   I.megoldás:
   (1pont) Boole-formulából:
   (4pont) $P(\overline{H} \cdot (\overline{N} \cdot \overline{A})) \geq 1 - P(\overline{\overline{H}}) - P(\overline{\overline{N} \cdot \overline{A}}) = *$
   (4pont) Függetlenség miatt: $P(\overline{\overline{N} \cdot \overline{A}}) = 1 - P(\overline{N} \cdot \overline{A}) = 1 - P(\overline{N})P(\overline{A}) = \frac{5}{8}$
   (2pont) $* = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$
   II.megoldás:
   (1pont) Szita-formulából:
   (4pont) $P(\overline{H} \cdot (\overline{N} \cdot \overline{A})) = P(\overline{H}) + P(\overline{N} \cdot \overline{A}) - P(\overline{H} + (\overline{N} \cdot \overline{A})) = *$
   (3pont) Függetlenség miatt: $P(\overline{N} \cdot \overline{A}) = P(\overline{N})P(\overline{A}) = \frac{3}{8}$
   (2pont) $P(\overline{H} + (\overline{N} \cdot \overline{A})) \leq 1$
   (1pont) $* \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - 1 = \frac{1}{8}$

   (4pont) Teljesen független: $P(\overline{H} \cdot \overline{N} \cdot \overline{A}) = P(\overline{H})P(\overline{N})P(\overline{A}) = \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{9}{32}$

2. Egy négyzetrácsra, aminek oldalhosszai 5 centi hosszúak, addig dobálunk $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ centi átmérőjű érméket, amíg az egyik le nem fed egy csúcsot. Mennyi a dobások számának várható értéke és szórása? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 dobásra lesz szükség?

   (2pont) Geometriai valószínűségi mező (az érme középpontjának elhelyezkedése egy négyzeten belül)
   (1pont) Ha az érme középpontja a csúcshoz $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ közelebb van, akkor fedi.
   (2pont) A 25 területű négyzetből a kedvező terület négy negyedkör.
   (2pont) a kedvező terület 9
   (1pont) Azaz egy érme $\frac{9}{25}$ valószínűséggel fed csúcsot.
   (2pont) A dobássorozat hossza ezzel a paraméterrel geometriai eloszlású.
   (2pont) $EX = \frac{25}{9} \approx 2{,}7778$
   (3pont) $\sigma X = \frac{\sqrt{q}}{p} = \frac{20}{9} \approx 2{,}2222$
   (1pont) $P(X > 1) =?$
   (2pont) $P(X > 1) = 1 - P(X = 1)$
   (2pont) $P(X > 1) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0,64$

3. A magyar közutakon az olyan napok aránya, amikor egyetlen súlyos baleset sem történik 25%. Rengeteg autó közlekedik, nagyságrendileg ugyanannyi minden nap, és minden autó egymástól függetlenül, egyforma valószínűséggel okoz balesetet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a jövő héten pontosan 2 napon lesz több, mint 1 súlyos baleset?

   (3pont) Poisson eloszlású a napi balesetek száma
   (2pont) $P(X = 0) = \frac{1}{4}$
   (2pont) $e^{-\lambda} = \frac{1}{4}$, azaz $\lambda = ln4 \approx 1{,}3863$
   (2pont) $P(X > 1) =?$
   (3pont) $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}ln4 \approx 0{,}4034 = p$
   (3pont) A héten a napok száma ahol több, mint 1 baleset lesz $Y \in Bin(7, p)$.
   (2pont) $P(Y = 2) =?$
   (3pont) $P(Y = 2) = \binom{7}{2}p^2(1-p)^5 \approx 0{,}2583$

4. Választunk egy $(x; y)$ pontot az egységnégyzetről az $f_{X,Y}(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvénnyel $(0 < x, y < 1)$. Mi lesz az x koordináta feltételes eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye, ha az y koordináta egy $0 < a < 1$ szám.

   Ha valaki a függetlenséget szépen megindokolja, és abból következtet (végig részletesen és helyesen), akkor maximális pontot érdemel.
   (3pont) $f_{X|Y}(x|a) =?$ és $F_{X|Y}(x|a) =?$
   (4pont) $f_Y(y) = \int_0^1 4xy\ dx =$
   (2pont) $= [2x^2y]_0^1 = 2y,$
   (1pont) ahol $0 < y < 1$.
   (3pont) $f_{X|Y}(x|a) = \frac{4xa}{2a} = 2x,$
   (2pont) ahol $0 < x < 1$.
   (3pont) $F_{X|Y}(x|a) = \frac{\int_0^x 4ta\ dt}{2a} = x^2,$
   (2pont) ahol $0 < x < 1$.

5. Ha András eltör egy botot, akkor a töréspont a bot középső harmadán egyenletesen helyezkedik el. András most a kezébe vesz egy 15 centi hosszú botot, és azt eltöri, majd a bal kezében levő darabot ismét eltöri. Adjuk meg a második törés után a bal kezében maradó darab hosszának sűrűségfüggvényét!

   (2pont) Az első töréspont bal oldalról $X \in U(5, 10)$
   (2pont) A második töréspont $Y \in U(\frac{X}{3}, \frac{2X}{3})$, $f_Y(y) =?$
   (2pont) Folytonos TVT sűrűségre $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|t) f_X(t) dt$
   (1pont) $f_X(t) = \frac{1}{5}$,
   (1pont) ahol $5 < t < 10$.
   (1pont) $f_{Y|X}(y|t) = \frac{3}{t}$,
   (2pont) ahol $5 < t < 10$ és $\frac{t}{3} < y < \frac{2t}{3}$.
   (2pont) $f_Y(y) = \int_{max(5,\frac{3}{2}y)}^{min(10,3y)} \frac{3}{t}\frac{1}{5} dt =$
   (1pont) $= [\frac{3}{5} lnt]_{max(5,\frac{3}{2}y)}^{min(10,3y)}$,
   (2pont) ahol $\frac{5}{3} < y < \frac{20}{3}$.
   (2pont) Ha $\frac{5}{3} < y < \frac{10}{3}$: $f_Y(y) = [\frac{3}{5} lnt]_5^{3y} = \frac{3}{5} ln \frac{3y}{5}$.
   (2pont) Ha $\frac{20}{3} > y \geq \frac{10}{3}$: $f_Y(y) = [\frac{3}{5} lnt]_{\frac{3}{2}y}^{10} = \frac{3}{5} ln \frac{20}{3y}$.

6. Egy kapitány 20 éves korától kezdve minden évben kivezette a hajóját és legénységét halászni. A kapitány megfigyelte, hogy a halászhajóján az egy év alatt fogott halak összsúlyának átlaga 150 tonna, szórása pedig 30 (az évek folyamán azonos maradt ez az eloszlás, és az évek függetlenek egymástól). Valószínűségszámítási tudását felhasználva arra jutott, hogy az eddigi összes fogás tömegének szórása 150. Hány éves a kapitány? Mennyi a valószínűsége annak, hogy az évek alatt fogott halak összsúlya legalább 100 tonnával több, mint az összes fogás tömegének várható értéke?

   (1pont) Ha az éves fogás X_i az i. évben, akkor az összeg szórása:
   (2pont) $\sigma(\sum_i X_i) = 150$
   (3pont) Függetlenek az évek: $\sigma^2(\sum_i X_i) = \sum_i \sigma^2(X_i) = 30^2 + 30^2 + .. + 30^2 = n30^2 = 150^2$
   (2pont) $n = 25$, így 45 éves a kapitány. (19+25=44 válasz is elfogadható)
   (3pont) CHT: azonos eloszlásúak összegeként áll elő a teljes mennyiség, így normálissal közelíthető
   (2pont) Eddigi össz fogás $Y \in N(3750, 150)$
   (2pont) $P(Y \geq 3850) =?$
   (3pont) $P(Y \geq 3850) = 1 - P(\frac{Y-3750}{150} < \frac{100}{150}) = 1 - \Phi(\frac{2}{3})$
   (2pont) $P(Y \geq 3850) \approx 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$