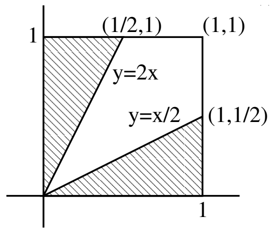
1. Két kockával dobunk. A: a különbség 3, B: mindegyik páratlan, C: van közöttük 2-es. Számolja ki a $P(A(B+\overline{C}))$ és $P((A+C)\overline{B})$ valószínűségeket!

   Az A és B, illetve a C és B események kizáróak, azaz $AB=\emptyset$, $CB=\emptyset$.
   Így $B+\overline{C}=\overline{C}$, és $A(B+\overline{C})=A\overline{C}$, tehát $P(A(B+\overline{C}))=P(A\overline{C})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, a klasszikus valószínűség szerint (jó esetek: 1,4, 3,6, 4,1, 6,3, összes eset $6\cdot 6=36$).
   Másrészt (szintén az eredeti megfigyelés miatt) $A\overline{B}=A$, $C\overline{B}=C$, így $(A+C)\overline{B}=A\overline{B}+C\overline{B}=A+C$, tehát $P((A+C)\overline{B})=P(A+C)=P(A)+P(C)-P(AC)=\frac{6}{36}+\frac{11}{36}-\frac{2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$, az összeg valószínűségére vonatkozó képlet és a klasszikus valószínűség szerint.

2. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több, mint kétszerese lesz a másiknak?

   Legyen a két szám $x,y\in[0,1]$, ekkor $(x,y)\in[0,1]^2$, geometriai valószínűséget használunk.
   „Az egyik szám több, mint kétszerese lesz a másiknak”$=\{x>2y\}$ vagy $\{y>2x\}$.
   A megfelelő egyeneseket, illetve az egyenlőtlenségeknek megfelelő területeket ábrázolva:



   Így $P(x>2y \text{ vagy } y>2x)=\dfrac{\text{jó terület}}{\text{összes terület}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{2}$.

3. Három szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van hatos értékünk, ha tudjuk, hogy mindegyik dobás páros lett?

   A feltételes valószínűség definíciója szerint: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.
   Így $P(\text{van 6}|\text{mind páros})=\dfrac{P(\text{van 6 és mind páros})}{P(\text{mind páros})}=\frac{(\frac{3}{6})^3-(\frac{2}{6})^3}{(\frac{3}{6})^3}=\frac{19}{27}$,
   ahol a valószínűségek számításánál kihasználtuk, hogy az egyes kockákon dobott értékek függetlenek egymástól (ezért az együttes bekövetkezés valószínűsége az egyes valószínűségek szorzata), és a számláló valószínűségét a (relatív) komplementer esemény valószínűségéből számoltuk.

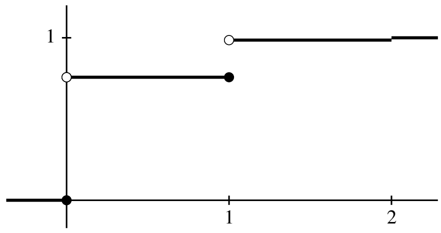
4. Három egyforma doboz közül kettőben 2 piros, egyben 1 piros és 1 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból egy golyót. Ha ez piros, mennyi a valószínűsége, hogy a dobozban maradó golyó színe fehér?

   Ez a feltételes valószínűség a Bayes tételből számolható, ahol a teljes eseményrendszer:
   $A_i=$ „az i. dobozból húzunk”, $i=1,2,3$. Ezekre $P(A_i)=\frac{1}{3}$, $i=1,2,3$,
   és a $B=$ „pirosat húzunk” eseményre $P(B|A_1)=P(B|A_2)=1$, $P(B|A_3)=\frac{1}{2}$.
   Így $P(B)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ (a teljes valószínűség tétel szerint),
   és $P(\text{maradó golyó fehér}|B)=\dfrac{P(\text{maradó fehér, húzott piros})}{P(B)}=\dfrac{P(\text{3. dobozból húzunk pirosat})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{5}$.

5. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor egyszer dobunk egy szabályos kockával, ha írás, akkor kétszer. Legyen X a dobott hatosok száma.
   a) Adjuk meg X eloszlását!
   b) Ábrázoljuk X eloszlásfüggvényét!

   a) Az X valószínűségi változó értékei: $R_X=\{0,1,2\}$.
   Az ezekhez tartozó valószínűségeket a teljes valószínűség tételből számolhatjuk ki, ahol a teljes eseményrendszer: $A_1=$ „fejet dobunk”, $A_2=$ „írást dobunk”, $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$.
   $P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{6})^2=\frac{55}{72}$,
   $P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$,

$P(X=2) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{72}$.
(Ezek összege 1, így tényleg eloszlást kapunk.)
b) Az eloszlásfüggvény a 0, 1, 2 helyeken rendre $\frac{55}{72}$-et, $\frac{2}{9}$-et, illetve $\frac{1}{72}$-et ugró lépcsősfüggvény, ami ezeken a helyeken balról folytonos:



6. Egy 20×20-as négyzetrácsos padlózatra véletlenül leejtünk 5 db 3 cm-es átmérőjű pénzérmét. A pénzérmék szanaszét gurulva megállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol (azaz nincs takarásban semelyik négyzet semelyik oldalával sem)?

A valószínűséget a binomiális eloszlásból számíthatjuk.
Ha $X =$ „a teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landoló érmék száma”, akkor $X \in B(5, p)$, ahol p annak a valószínűsége, hogy egy érme teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol, és a $P(X \geq 3)$ valószínűséget keressük.
p-t geometriai valószínűséggel számolhatjuk ki, csak egy négyzetet figyelembe véve.
$p = \frac{\text{jó terület}}{\text{összes terület}} = \frac{17^2}{20^2} = 0,7225$ (egy 20 cm $\times$ 20 cm-es négyzet oldalaitól több, mint 1,5 cm-rel beljebb levő pontok a jó helyei az érmék középpontjainak),
így a binomiális eloszlás képlete szerint $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{5-k} = 10 \cdot 0,7225^3 \cdot 0,2775^2 + 5 \cdot 0,7225^4 \cdot 0,2775^1 + 0,7225^5 \approx 0,8654$.