Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Együttes és vetületi eloszlás, sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény

Szűk elméleti összefoglaló

Együttes és vetületi eloszlásfüggvény:

$X = (X_1, X_2, \dots X_n)$ valószínűségi vektorváltozónak hívjuk.

X eloszlásfüggvénye ekvivalens az $X_1, X_2, \dots X_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényével, azaz $P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots X_n < x_n) = F_X(x_1, x_2, \dots x_n)$

Együttes eloszlás tulajdonságai:

a) F_X minden változójában nem csökkenő függvény, azaz bármilyen *i* esetén ha $x_i^* < x_i^{**}$, akkor $F_X(x_1, \dots x_i^*, \dots x_n) \le F_X(x_1, \dots x_1^{**}, \dots x_n)$
b) F_X minden változójában balról folytonos
c) $\lim_{\forall x_i \to \infty} F_X(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$
d) $\lim_{\exists x_i \to -\infty} F_X(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$

e) $P(a < X < b, c < Y < d) = P(X < b, Y < d) + P(X < a, Y < c) - P(X < a, Y < d) - P(X < b, Y < c) = F_{X,Y}(b, d) + F_{X,Y}(a, c) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c)$

Ha az *n* darab változóból kiválasztunk *k* darabot, akkor az így kiválasztott változók együttes eloszlását az eredeti F_X eloszlás egy k-dimenziós vetületi eloszlásának nevezzük.

Ha ismert az F_X együttes eloszlásfüggvény, akkor abból az összes vetületi eloszlásfüggvény meghatározható. Ha azonban az egyes vetületi eloszlásfüggvényeket ismerjük is, abból az együttes eloszlásfüggvény meghatározása nem triviális.

Az $X_1, X_2, \dots X_n$ valószínűségi változók páronként függetlenek, ha $\forall 1 \le i < j \le n$-re teljesül

$$F_{X_i, X_j}(x, y) = F_{X_i}(x) F_{X_j}(y) \; \forall x, y$$

Az $X_1, X_2, \dots X_n$ változók teljesen függetlenek, ha $\forall 2 \le k \le p$ és $\forall$ $1 \le i_1 < i_2 < \cdots i_k \le p$ esetén

$$F_{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}\left(x_{i_j}\right), \forall x_{i_j} \in R$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Együttes és vetületi sűrűség:

Diszkrét eset:

Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók, akkor a $P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$ valószínűségek összességét a két változó együttes eloszlásának nevezzük.

Ha $X_1, X_2, \dots X_p$ diszkrét v.v.-k és $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le p$, akkor az $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots X_{j_k}$ változók együttes eloszlása az $X_1, X_2, \dots X_p$ változók együttes eloszlásának egy k-dimenziós vetületi- vagy peremeloszlása.

Folytonos eset:

Az $X_1, X_2, \dots X_n$ folytonos v.v-k együttes sűrűségfüggvényén azt az $f_{X_1,X_2,\dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$ függvényt értjük, amelyikre igaz, hogy

$$F_{X_1,X_2,\dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,X_2,\dots X_n}(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_n dt_{n-1} \dots dt_1$$

, avagy

$$\frac{\partial^n F_{X_1,X_2,\dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_{X_1,X_2,\dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Tétel: a k-dimenziós vetületi sűrűségfüggvényt úgy kaphatjuk meg az együttes sűrűségfüggvényből, hogy azt minden más, a k dimenzió közt nem szereplő változó szerint ki kell integrálni a $-\infty, \infty$ szakaszon.

Valószínűségi változók függetlensége:

Ha X és Y diszkrét v.v-k függetlenek, akkor $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)\ \forall i, j$

Ha X és Y folytonos v.v-k függetlenek, akkor $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Feladatok

Bevezető feladatok

1. Példa

Legyen X és Y együttes eloszlásfüggvénye $F_{X,Y}(x, y) = x^3 y, 0 \le x, y \le 1$. Mennyi $P(0{,}25 \le X \le 0{,}75, 0{,}25 \le y < 0{,}5)$?

Megoldás:

$$P(0{,}25 \le X \le 0{,}75, 0{,}25 \le y < 0{,}5) = F_{X,Y}(0{,}75\,, 0{,}5) - F_{X,Y}(b, c) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(0{,}25\,, 0{,}25) = 0{,}203$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

2. Példa

Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = 2(x^3 + y^3), 0 \leq x, y \leq 1$. Mekkora $P(X^2 < Y)$?

Megoldás:

Kicsit gondolkozni kell a megoldáshoz. A feladatot értelmezve az alábbira jutunk: X minden lehetséges x értékére összegezzük annak a valószínűségét, hogy az adott X=x mellett $x^2 < Y$. Azaz minden X=x-hez kell $P(x^2 < Y)$:

$$P(X^2 < Y) = \int_0^1 P(x^2 < Y)dx$$

Meg kellene még határozni $P(x^2 < Y)$-t is ehhez. $P(x^2 < Y)$ tulajdonképpen azon valószínűségek összege, amikre az adott X=x mellett Y=y-ra teljesül, hogy $x^2 < y$. Tehát összegezni kell az összes y értékre, amire $x^2 < y$, a $P(X = x, Y = y)$ valószínűségeket, amiket az együttes eloszlásból kaphatunk meg. Összegezve:

$$P(X^2 < Y) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2x^3 - \frac{x^8}{2} - 2x^5 \right) dx = \frac{11}{18}$$

3. Példa

Az X,Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6y^2, |y| < 1 \text{ és } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$. Mennyi a valószínűsége, hogy az (X,Y) pár az A(0, 0), B(1/2, 0) és C(1/2, -1/4) csúcsok által határolt háromszögbe esik?

Megoldás:

Azon $P(X = x, Y = y)$ valószínűségek összegét keressük, amikre igaz az, hogy $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, valamint $y \in \left[-\frac{1}{2}x, 0\right]$. Amiatt szükséges y-t x-szel kifejezni, mert különben a háromszögön kívülre is eshetne pont, pl. x=0 és y=-1/4 – ezt a pontot márpedig nyilván nem lenne szabad belevenni a megoldásba.

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{x}{2}}^0 f_{X,Y}(x,y)dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{4} dx = \frac{1}{256}$$

Természetesen csinálhattuk volna úgy is, hogy y-t integráljuk a [0, -1/4] tartomány, x-et pedig y-ból kifejezve adtuk volna meg.

4. Példa

Először egy szabályos kockával dobunk, majd a dobott értéknek megfelelően kihúzunk lapokat egy 32 lapos kártyapakliból. Jelölje X a kihúzott lapok közt található figurás lapok számát, Y pedig legyen a kihúzott királyok száma. Adja meg a $P(X = 4, Y = 2)$ valószínűséget!

Megoldás:

$P(X = 4, Y = 2)$ függ a kockával dobott számtól, tehát annak feltételes valószínűségeként fejezhető ki. Jelölje Z a kockával dobott számot.

$$P(X=4, Y=2) = \sum_{k=1}^{6} P(X=4, Y=2 | Z=k) P(Z=k)$$

$$P(Z=k) = \frac{1}{6}$$

Mivel X=4, így legalább négyet kellett dobni, tehát

$$P(X=4, Y=2 | Z=k) = 0, k = 1,2,3$$

$$P(X=4, Y=2 | Z=4) = \frac{\binom{16-4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{32}{4}}$$

$$P(X=4, Y=2 | Z=5) = \frac{\binom{32-16}{1}\binom{16-4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}$$

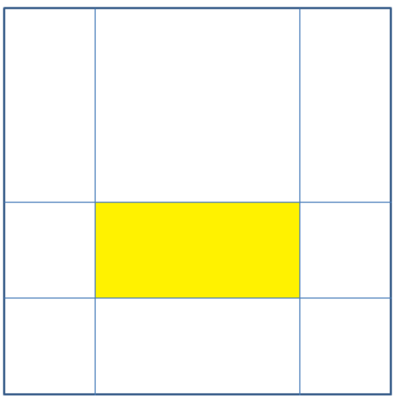
$$P(X=4, Y=2 | Z=6) = \frac{\binom{32-16}{2}\binom{16-4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{32}{6}}$$

5. Példa

Legyen X és Y együttes eloszlásfüggvénye $F_{X,Y}(x,y) = x^3 y, 0 \leq x, y \leq 1$. Mennyi $P(0{,}25 \leq X \leq 0{,}75, 0{,}25 \leq Y \leq 0{,}5)$?

Megoldás:

Egy változó esetén könnyen láttuk, hogy $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$. Alapvetően itt is ugyanezt kell alkalmazni, csak most picit nehezebben látszik hogyan írható át. Nézzük meg ezt egy ábrán keresztül! Sárgával jelölt rész az, amire kíváncsiak vagyunk. Ezt kellene kifejezni $P(X \leq x_1, Y \leq y_1)$ jellegű kifejezésekkel.



$$P(X \leq 0{,}75, Y \leq 0{,}5) - P(X \leq 0{,}75, Y \leq 0{,}25) - P(X \leq 0{,}25, Y \leq 0{,}5) + P(X \leq 0{,}25, Y \leq 0{,}25)$$

$P(X \leq 0{,}25, Y \leq 0{,}25)$-t azért kell a végén hozzáadni, mert kétszer vontuk le.

Ezt visszaírva:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$P(0{,}25 \le X \le 0{,}75, 0{,}25 \le Y \le 0{,}5)$$
$$= F_{X,Y}(0{,}75, 0{,}5) - F_{X,Y}(0{,}75, 0{,}25) - F_{X,Y}(0{,}25, 0{,}5) + F_{X,Y}(0{,}25, 0{,}25)$$
$$= 0{,}75^3 \times 0{,}5 - 0{,}75^3 \times 0{,}25 - 0{,}25^3 \times 0{,}5 + 0{,}25^3 \times 0{,}25$$

ZH és vizsga feladatok

6. Példa

Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból két lapot kiválasztunk. Jelölje X a kihúzott piros, Y a kihúzott zöldek számát. Adja meg X és Y együttes eloszlását! Függetlenek X és Y?

Megoldás:

Elsőként állapítsuk meg X és Y értékkészletét: $X \in \{0,1,2\}, Y \in \{0,1,2\}$

X és Y együttes eloszlása a definícióból: $P(X = x, Y = y)$, ahol már tudjuk hogy $x, y \in \{0,1,2\}$. Diszkrét esetben az eloszlást a legkönnyebb táblázatos formában áttekinteni:

Y\X	0	1	2
0	$P(X = 0, Y = 0)$	$P(X = 1, Y = 0)$	$P(X = 2, Y = 0)$
1	$P(X = 0, Y = 1)$	$P(X = 1, Y = 1)$	$P(X = 2, Y = 1)$
2	$P(X = 0, Y = 2)$	$P(X = 1, Y = 2)$	$P(X = 2, Y = 2)$

Innen néhány valószínűségről azonnal meg tudjuk mondani, hogy az értéke 0, mivel lehetetlen eseményt jelent (a kihúzott lapok száma pontosan kettő, tehát ahol X+Y>2 ott P=0).

A fennmaradó valószínűségek az alábbiak:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{32-8-8}{2}}{\binom{32}{2}}$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{8}{1}\binom{32-8-8}{1}}{\binom{32}{2}}$$

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{8}{0}\binom{8}{1}\binom{32-8-8}{1}}{\binom{32}{2}}$$

Általánosan fölírva (nem muszáj így fölírni, elég az eddigihez hasonlóan fölsorolni az összeset persze):

$$P(X=i,Y=j)=\frac{\binom{8}{i}\binom{8}{j}\binom{32-8-8}{2-i-j}}{\binom{32}{2}}, \forall i,j | i+j \leq 2$$

Két változó akkor független, ha bármely $x \in X, y \in Y$ párosra igaz, hogy $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$. Két módon oldhatjuk meg: vagy mutatunk egy ellenpéldát, vagy megmutatjuk, hogy a fenti egyenlőség mindig igaz. Általában egyszerűbb az ellenpéldát megtalálni, tipikusan szokott lenni, kezdjük ezzel:

a) ellenpélda mutatása

$$P(X=x)=\frac{\binom{8}{x}\binom{32-8}{2-x}}{\binom{32}{2}}$$

$$P(Y=y)=\frac{\binom{8}{y}\binom{32-8}{2-y}}{\binom{32}{2}}$$

Nagyon könnyen tudunk ellenpéldát mutatni ezt tekintve, mivel vannak lehetetlen eseményeink 0 valószínűséggel, holott a fenti két kifejezésből látszik, hogy azok sosem lesznek 0-k. Így pl. $P(X=2,Y=2)\neq P(X=2)P(Y=2)$ egy jó ellenpélda, tehát nem függetlenek.

b) egyenlőség bizonyítása

Ekkor megmutatjuk, hogy $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$ mindig teljesül. Az eddigi kifejezéseket behelyettesítve azt kellene kapnunk, hogy

$$\frac{\binom{8}{i}\binom{8}{j}\binom{32-8-8}{2-i-j}}{\binom{32}{2}}=\frac{\binom{8}{i}\binom{32-8}{2-i}}{\binom{32}{2}}\times\frac{\binom{8}{j}\binom{32-8}{2-j}}{\binom{32}{2}}$$

Ez az egyenlőség azonban nem áll fenn, így itt is arra jutunk, hogy a két változó nem független.

Célszerű általában ellenpéldát keresni először. Ha kipróbáltunk több példát is, de mindről kiderül, hogy az egyenlőség fönnáll rajtuk, akkor lehet célszerű megpróbálni a második módszert (persze ehhez föl kell tudni írni általános alakban a valószínűségeket, így nehezebb egy fokkal).

7. Példa

Az X és Y v.v. együttes eloszlása az alábbi táblázatban szerepel. Mekkora *p* értéke? Függetlenek-e X és Y? Számolja ki X várható értékét és szórását!

Y\X	-1	0	1
-1	p	p	10p
1	10p	10p	20p

Megoldás:

A relatív gyakoriságok összege 1-et kell kiadjon, így $52p=1 \rightarrow p=\frac{1}{52}$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

A függetlenséget egyszerűbb megpróbálni cáfolni mint bizonyítani – itt is célszerűbb ellenpélda felhozásával kezdenünk. Például $P(X=-1, Y=-1) = P(X=-1)P(Y=-1)$ esetén arra jutunk, hogy $p = (p+10p) \times (p+p+10p)$, majd p-t behelyettesítve látjuk, hogy ezek nem egyenlőek, tehát a két változó nem független.

$$\boldsymbol{E}X = \sum_{\forall x} xP(X=x) = (-1)\times(p+10p) + 0\times(p+10p) + 1\times(10p+20p) = -11p+30p$$
$$= 19p = \frac{19}{52}$$

$\sigma^2 X = EX^2 - (EX)^2$, de még kell ehhez

$$\boldsymbol{E}X^2 = \sum_{\forall x} x^2 P(X=x) = (-1)^2\times(p+10p) + 0^2\times(p+10p) + 1^2\times(10p+20p) = 11p+30p$$
$$= \frac{41}{52}$$

Így a variancia $\sigma^2 X = \frac{41}{52} - \left(\frac{19}{52}\right)^2$, a szórás pedig $\sigma X = \sqrt{\sigma^2 X}$.

8. Példa

Legyen X,Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \alpha xy, 0 < x < 2, 0 < y < 2$. Mekkora α? Adja meg Y perem sűrűségfüggvényét és várható értékét!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény minden változója szerint kiintegrálva 1-et kell adjon, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \alpha\int_0^2\int_0^2 xy\,dxdy = \alpha\int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_0^2 dy = \alpha\int_0^2 2y\,dy = \alpha[y^2]_0^2 = 4\alpha$$

Ebből $4\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$.

Az együttes sűrűségfüggvényből egy változó vetületi sűrűségfüggvényét úgy kapjuk meg, ha minden más változó szerint a teljes tartományon kiintegráljuk, tehát

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{xy}{4}dx = \left[\frac{x^2 y}{8}\right]_0^2 = \frac{y}{2}, 0 < y < 2$$

Y várható értékét Y sűrűségfüggvényéből tudjuk számolni:

$$\boldsymbol{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \times f_Y(y)\,dy = \int_0^2 y\times\frac{y}{2}dy = \int_0^2 \frac{y^2}{2}dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6}$$

9. Példa

Három kockával dobunk. Legyen X a dobott 1-esek, Y a dobott páratlanok száma. Adja meg X és Y eloszlását, illetve az együttes eloszlás táblázatát!

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Megoldás:

$$X \in B\left(3, \frac{1}{6}\right), Y \in B\left(3, \frac{3}{6}\right)$$

Az együttes eloszlás táblába a $P(X = x, Y = y)$ valószínűségek kerülnek.

Y\X	0	1	2	3
0	$\frac{3^3}{6^3}$	0	0	0
1	$\frac{3 \times (2 \times 3 \times 3)}{6^3}$	$\frac{3 \times (1 \times 3 \times 3)}{6^3}$	0	0
2	$\frac{3 \times (2 \times 2 \times 3)}{6^3}$	$\frac{3!\,(1 \times 2 \times 3)}{6^3}$	$\frac{\binom{3}{2}(1 \times 1 \times 3)}{6^3}$	0
3	$\frac{2^3}{6^3}$	$\frac{3 \times (1 \times 2 \times 2)}{6^3}$	$\frac{\binom{3}{2}(1 \times 1 \times 2)}{6^3}$	$\frac{1^3}{6^3}$

10. Példa

Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $T = \min\{X, Y\}, W = \max\{X, Y\}$. Adja meg T és W együttes sűrűségfüggvényét!

Megoldás:

A feladat megadni $F_{T,W}(r,s) = P(T < r, W < s)$ meghatározása. Ezt ha naivan kifejtjük, akkor

$$P(T < r, W < s) = P(X < r, Y < r, X < s, Y < s)$$

Azonban ez az alak nekünk most nem segít, mivel nem ismerjük *r* és *s* viszonyát. Át kellene tehát alakítani egy olyan formára, ahol ez a viszony tisztázott. Itt ki kell használnunk, hogy $P(B) = P(\bar{A}, B) + P(A, B)$, amit átrendezve $P(A, B) = P(B) - P(\bar{A}, B)$. Ha ezt rávetítjük $P(T < r, W < s)$-re, ahol $A \coloneqq T < r$, $B \coloneqq W < s$, akkor az alábbit kapjuk:

$$P(T < r, W < s) = P(T < r) - P(T \geq r, W < s)$$

Az A és B eseményeket T és W helyett X és Y-nal kifejezve az alábbi alakra jutunk:

$$P(T < r, W < s) = P(X < r, Y < r) - P(X \geq r, Y \geq r, X < s, Y < s) =$$
$$P(X < r, Y < r) - P(r \leq X < s, r \leq Y < s)$$

Innen a standard normális eloszlásfüggvénnyel ki tudjuk fejezni a valószínűségeket, mivel a két változó független így az együttes eloszlásfüggvény a két változó eloszlásfüggvényének szorzata

$$P(T < r, W < s) = \phi(r) \times \phi(r) - \big(\phi(s) - \phi(r)\big) \times \big(\phi(s) - \phi(r)\big) = \phi(r)^2 - \big(\phi(s) - \phi(r)\big)^2$$

Mivel nekünk a sűrűségfüggvény kell, így

$$f_{T,W}(r,s) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} F_{T,W}(r,s) = \frac{\partial}{\partial s}\big(2\varphi(r) - \phi(s)^2 - 2\varphi(r) + 2\phi(s)\varphi(r)\big) = 2\varphi(s)\varphi(r)$$
$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{s^2 + r^2}{2}}, r \leq s$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

11. Példa

Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye $F_{X,Y}(x,y) = e^{-2x-\frac{y}{2}}, 0 < x, y < \infty$. Határozza meg a X és Y eloszlásfüggvényeket, az együttes sűrűségfüggvényt, valamint a vetületi sűrűségfüggvényeket!

Megoldás:

Határozzuk meg először az együttes sűrűségfüggvényt, ami definíció szerint

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = e^{-2x-\frac{y}{2}}, 0 < x, y < \infty$$

Ebből ki tudjuk számolni a vetületi sűrűségfüggvényeket:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{0}^{\infty} e^{-2x-\frac{y}{2}}\, dy = 2e^{-2x}, 0 < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-2x-\frac{y}{2}}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, 0 < y < \infty$$

A marginális sűrűségfüggvényekből X és Y eloszlásfüggvényét is meg tudjuk határozni:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{0}^{x} 2e^{-2t}\, dt = 1 - e^{-2x}, x > 0$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\, dt = 1 - e^{-\frac{y}{2}}, 0 < y$$

12. Példa

Egy jól megkevert 32 lapos magyar kártyacsomagból leosztunk 8-at. Legyen X=1 ha van piros, X=0 ha nincs. Legyen X=1 ha van ász, Y=0 ha nincs. Adja meg X és Y együttes eloszlását!

Megoldás:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{32-8-3}{8}}{\binom{32}{8}}$$

Felhasználva hogy $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$:

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) - P(X = 0, Y = 0)$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{32-8}{8}}{\binom{32}{8}}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{\sum_{i=1}^{7} \binom{7}{i} \binom{32-8-3}{8-i}}{\binom{32}{8}}$$

Felhasználva hogy $1 = P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(\overline{AB})$:

$$P(X=1, Y=1) = 1 - P(X=0, Y=0) - P(X=0, Y=1) - P(X=1, Y=0)$$

13. Példa

Legyenek $X, Y \in G(p)$ függetlenek. Mekkora $P(X = Y)$?

Megoldás:

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^{k-1}p\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2}p^2$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^{k-1} = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$