Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Várható érték, szórás, momentumok

Szűk elméleti összefoglaló

<u>Várhatóérték:</u>

Jelölése: $\boldsymbol{E}X$, vagy $\boldsymbol{E}(X)$, ritkábban $\mu(X)$

Intuíció: X lehetséges értékeinek a valószínűségeikkel súlyozott összege

NEM FELTÉTLEN ez az érték következik be a legnagyobb valószínűséggel!

Diszkrét esetben: $\boldsymbol{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$

Folytonos esetben: $\boldsymbol{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

Szabályok:

a) ha Y=g(X), akkor $\boldsymbol{E}Y = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X = x_i)$ vagy $\boldsymbol{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
b) $Y = aX + b$, $\boldsymbol{E}Y = \boldsymbol{E}(aX + b) = \boldsymbol{E}(aX) + \boldsymbol{E}(b) = a\boldsymbol{E}X + b$

Fontosabb eloszlások várható értékei:

a) Binomiális: np
b) Poisson: λ
c) Geometriai: $\frac{1}{p}$
d) Egyenletes: $\frac{a+b}{2}$
e) Exponenciális: $\frac{1}{\lambda}$
f) Normális: μ

<u>Magasabb momentumok:</u>

X *n*-edik momentumán az X^n v.v. várható értékét értjük, azaz $\boldsymbol{E}X^n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n P(X = x_i)$ vagy $\boldsymbol{E}X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$

<u>Szórásnégyzet (variancia):</u>

Jelölése: $\boldsymbol{\sigma}^2 X$, $\boldsymbol{\sigma}^2(X)$ vagy $var(X)$

Intuíció: az X valószínűségi változó átlagos négyzetes eltérése a várható értékétől

Az X változó varianciája az $Y = (X - \boldsymbol{E}X)^2$ várható értékével egyenlő, avagy

$$\sigma^2(X) = E[X - EX]^2$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Az X v. v. szórása egyenlő a varianciájának négyzetgyökével: $\sigma X = \sqrt{\sigma^2 X}$

$$\sigma^2 X = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \, P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \, f_X(x) dx$$

Szabályok:

a) $\sigma^2 X = E(X-a)^2 - [E(X-a)]^2, \forall a \in R$
    a. spec. eset a=0, ekkor $\sigma^2 X = EX^2 - [EX]^2$
b) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$

Fontosabb eloszlások szórásnégyzetei:

a) Binomiális: npq
b) Poisson: λ
c) Geometriai: $\frac{1-p}{p^2}$
d) Egyenletes: $\frac{(b-a)^2}{12}$
e) Exponenciális: $\frac{1}{\lambda^2}$
f) Normális: σ^2

ZH és vizsga feladatok

1. Példa

Legyen $X \in N(-2,3)$. Adja meg $\boldsymbol{E}X^5$ értékét (a standard normális eloszlás második momentuma 1, a negyedik pedig 3, a páratlan momentumai pedig mind 0-k).

Megoldás:

Ha a feladatban megadták a standard normális tulajdonságait, akkor nyilván valahogy ezt kell kihasználni, írjuk hát át X-et:

$$\tilde{X} = \frac{X-(-2)}{3} = \frac{X+2}{3} \in N(0,1)$$

$$X = 3\tilde{X} - 2$$

$$X^5 = \left(3\tilde{X}-2\right)^5 = -32 + 240\tilde{X} - 720\tilde{X}^2 + 1080\tilde{X}^3 - 810\tilde{X}^4 + 243\tilde{X}^5$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}X^5 &= \boldsymbol{E}\left(-32 + 240\tilde{X} - 720\tilde{X}^2 + 1080\tilde{X}^3 - 810\tilde{X}^4 + 243\tilde{X}^5\right) \\ &= E(-32) + E\left(240\tilde{X}\right) - E\left(720\tilde{X}^2\right) + E\left(1080\tilde{X}^3\right) - E\left(810\tilde{X}^4\right) + E\left(243\tilde{X}^5\right) \\ &= -32 + 240E\left(\tilde{X}\right) - 720E\left(\tilde{X}^2\right) + 1080E\left(\tilde{X}^3\right) - 810E\left(\tilde{X}^4\right) + 243E\left(\tilde{X}^5\right) \\ &= -32 + 240 \times 0 - 720 \times 1 + 1080 \times 0 - 810 \times 3 + 243 \times 0\end{aligned}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

2. Példa

Legyen az X valószínűségi változó 3 paraméterű Poisson eloszlású. $V = 2X^2 + 5$ mellett adja meg V várható értékét!

Megoldás:

$$\boldsymbol{E}V = \boldsymbol{E}(2X^2 + 5) = \boldsymbol{E}(2X^2) + \boldsymbol{E}(5) = 2\boldsymbol{E}(X^2) + 5$$

$\boldsymbol{E}X^2$ az X második momentuma, azaz a varianciája. Itt most azt kell kihasználnunk, hogy $E[X - EX]^2 = EX^2 - (EX)^2$, mivel Poisson eloszlás lévén ismerjük a varianciáját (λ) és a várható értékét (λ), így a hiányzó tagot könnyen megkapjuk:

$\lambda = EX^2 - \lambda^2 \rightarrow 3 = EX^2 - 9 \rightarrow EX^2 = 12$

Ezt behelyettesítve

$$\boldsymbol{E}V = 2 \times 12 + 5 = 29$$

3. Példa

Legyen az X valószínűségi változó 2 paraméterű exponenciális eloszlású, valamint $V = X^2 + 3$. Adja meg V várható értékét és szórását!

Megoldás:

$$\boldsymbol{E}V = E(X^2 + 3) = EX^2 + 3$$

Exponenciális eloszlásból következik, hogy $EX = \frac{1}{\lambda}$ és $\sigma^2 X = \frac{1}{\lambda^2}$, amelyekből

$\sigma^2 X = EX^2 - (EX)^2 \rightarrow EX^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$EV = \frac{1}{2} + 3$$

$$\sigma V = \sqrt{\sigma^2 V}$$

$$\sigma^2 V = \sigma^2(X^2 + 3) = \sigma^2 X^2$$

$$\sigma^2 X^2 = EX^4 - (EX^2)^2$$

Innen még hiányzik EX^4, ami (kicsit csúnyán fölírva)

$$EX^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^4 \times 2e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 3)\right]_0^{\infty}$$
$$= 0 - (-0{,}5) = 0{,}5$$

Tehát $\sigma^2 V = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25 \rightarrow \sigma V = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

4. Példa

Legyen $X \in U(0{,}1)$ és $Y = X^3 - 1$. Számolja ki Y várható értékét!

Megoldás:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$EY = E(X^3 - 1) = EX^3 - 1$$

Itt sajnos EX^3 szerepel, amit nem tudunk a szórásból könnyen megkapni, tehát kénytelenek vagyunk kiintegrálni.

$$EX^3 = \int_0^1 x^3 f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 \times \frac{1}{1-0} dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$EY = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

5. Példa

Legyen $X \sim N(-3,2)$. Számolja ki az $Y = (X+5)^2$ várható értékét!

Megoldás:

$Y = X^2 + 10X + 25$, így $EY = E(X^2 + 10X + 25) = EX^2 + 10EX + 25$

EX=-3

$$EX^2 = \sigma^2 + (EX)^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$$

Tehát

$$EY = 13 - 10 \times 3 + 25 = 8$$

6. Példa

Egy magasugró versenyen a versenyzők 0,8 valószínűséggel ugorják át a lécet az induló magasságon. Mindenki háromszor próbálkozhat. Ha 12 versenyző indul, akkor jelöljük X-szel az induló magasságon végrehajtott ugrások számát. Adja meg X várható értékét!

Megoldás:

Jelölje X_i az *i* versenyző próbálkozásainak a számát. $X_i \in \{1,2,3\}$, a valószínűségek pedig

$P(X_i = 1) = 0{,}8$, $P(X_i = 2) = 0{,}2 \times 0{,}8$, $P(X_i = 3) = 1 - P(X_i = 1) - P(X_i = 2)$ (mivel akár sikerül az utolsó ugrása, akár nem, csak 3-szor ugorhat)

A versenyzők ugrása független egymástól, így

$$X = \sum_{i=1}^{12} X_i$$

Ebből, továbbra is a függetlenség miatt

$$EX = E\left(\sum_{k=1}^{12} X_k\right) = \sum_{k=1}^{12} EX_k = 12 \times EX_i = 12 \times \sum_{i=1}^{3} i \times P(X_i = i)$$

7. Példa

Legyen az X sűrűségfüggvénye

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

Mennyi $\boldsymbol{E}(3 - 2X)$?

Megoldás:

$$E(3 - 2X) = 3 - 2EX$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{3x} dx + \int_{0}^{1} x(1 - x^2) dx + \int_{1}^{\infty} x \times 0 dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} x e^{3x}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{1}{9} e^{3x}\right]_{-\infty}^{0} = 0 - \frac{1}{9}$$

$$\int_{0}^{1} x(1 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

Tehát $EX = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$

$$E(3 - 2X) = 3 - \frac{10}{36} = 2{,}722$$

8. Példa

Négyszer dobunk egy kockával. Minden dobás után egy golyót belerakunk egy dobozba. Ha a dobás 6-os, akkor piros golyót, ha mást kaptunk akkor fehér golyót. Ezután a dobozból kiveszünk egyszerre 2 golyót. Jelölje X a pirosak számát. Adja meg X várható értékét!

Megoldás:

X értékkészlete $R_X = \{0,1,2\}$.

$$\boldsymbol{E}X = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$

Y=0,1,2,3,4 a piros golyók száma a dobozban, $Y \sim B\left(4, \frac{1}{6}\right)$, tehát $P(Y = i) = \binom{4}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{4-i}$

$P(Y = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$, $P(Y = 1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}$, $P(Y = 2) = \frac{25}{216}$, $P(Y = 3) = \frac{5}{324}$, $P(Y = 4) = \frac{1}{1296}$

$P(X = 0)$ nem fontos, mivel úgyis 0 szorzóval szerepelne a várható értékben.

X=1 esete:

$$P(X = 1) = P(X = 1|Y = 0)P(Y = 0) + P(X = 1|Y = 1)P(Y = 1) + P(X = 1|Y = 2)P(Y = 2) + P(X = 1|Y = 3)P(Y = 3) + P(X = 1|Y = 4)P(Y = 4)$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X=1|Y=1)=\frac{\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1|Y=2)=\frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{6}$$

$$P(X=1|Y=3)=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{6}$$

$$P(X=1|Y=4)=0$$

$$P(X=1)=\frac{125}{1944}+\frac{25}{648}+\frac{5}{648}=\frac{215}{1944}$$

X=2 esetén:

$$P(X=2)=\sum_{i=0}^{4}P(X=2|Y=i)\,P(Y=i)$$

$$P(X=2|Y=0)=0$$

$$P(X=2|Y=1)=0$$

$$P(X=2|Y=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2|Y=3)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{6}$$

$$P(X=2|Y=4)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}}=1$$

9. Példa

Egy hibátlan érmével dobunk 3-szor. Jelölje X és Y a dobott fejek és írások számát. Számolja ki a Z=XY várható értékét és szórását!

Megoldás:

El kellene érnünk, hogy az XY szorzatot fölírjuk csak az egyik tag segítségével, különben nem tudjuk megoldani. $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$, valamint $Y=3-X$ (mivel 3 dobásból annyi az írás, amennyi nem fej). Így tehát föl tudjuk írni Z-t pusztán X segítségével:

$$Z=XY=3X-X^2$$

$$\boldsymbol{E}Z = \boldsymbol{E}(3X - X^2) = 3EX - EX^2$$

$$EX = 3 \times \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$EX^2 = \sigma^2 X + (EX)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1{,}5^2 = 3$$

$$\boldsymbol{E}Z = 3 \times 1{,}5 - 3 = 1{,}5$$

$\sigma^2 Z = \sigma^2(3X - X^2)$, viszont ezt egyelőre nem tudjuk tovább alakítani. Írjuk föl a másik alakban:

$$\sigma^2 Z = EZ^2 - (EZ)^2$$

$$Z^2 = (3X - X^2)^2 = 9X^2 - 6X^3 + X^4$$

$$\boldsymbol{E}Z^2 = 9\boldsymbol{E}X^2 - 6\boldsymbol{E}X^3 + \boldsymbol{E}X^4$$

Még hiányzik EX^3 és EX^4, ezeket viszont ki tudjuk számolni könnyen:

$$EX^3 = \sum_{i=0}^{3} i^3 P(X = i) = 1 \times \binom{3}{1}\frac{1}{2^3} + 2^3 \times \binom{3}{2}\frac{1}{2^3} + 3^3 \times \binom{3}{3}\frac{1}{2^3} = \frac{54}{8}$$

$$EX^4 = \sum_{i=0}^{3} i^4 P(X = i) = 1 \times \binom{3}{1}\frac{1}{2^3} + 2^4 \times \binom{3}{2}\frac{1}{2^3} + 3^4 \times \binom{3}{3}\frac{1}{2^3} = \frac{132}{8}$$

$$\sigma^2 Z = \left(9 \times 3 - 6 \times \frac{54}{8} + \frac{132}{8}\right) - (1{,}5)^2 = 3$$

$$\sigma Z = \sqrt{\sigma^2 Z} = \sqrt{3}$$

10. Példa

Legyenek X és Y független, 2 paraméterű Poisson eloszlású változók. Mennyi $\boldsymbol{E}(X - Y)^2$?

Megoldás:

$$\boldsymbol{E}(X - Y)^2 = E(X^2 - 2XY + Y^2) = EX^2 - 2E(XY) + EY^2 = 2 \times EX^2 - 2EX \times EY$$
$$= 2EX^2 - 2(EX)^2 = 2\sigma^2 X = 4$$

Itt kihasználtuk, hogy EX=EZ, valamint a változók függetlensége miatt **E**XY=**E**X***E**Y.

11. Példa

Egy X v.v. várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy X>0,5? Ha X normális, vagy egyenletes eloszlású? Segítség: $\phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}691$

Megoldás:

Ha X normális: $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - \phi(0{,}5) = 0{,}309$

Ha X egyenletes: $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - \frac{0{,}5-a}{b-a}$, tehát meg kell határoznunk a-t és b-t.

$EX = \frac{a+b}{2} = 0$➔a=-b

$\sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 1$➔$b - a = \sqrt{12}$

A kettőből $2b = \sqrt{12}$➔$b = \sqrt{3}, a = -\sqrt{3}$

Tehát $P(X > 0{,}5) = 1 - \frac{0{,}5+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 0{,}356$

Akkor valószínűbb, ha X egyenletes eloszlású.

12. Példa

Az X normális eloszlású v.v. várható értéke -5 és tudjuk, hogy $P(-5 \leq X < 0) = 0{,}3$. Mennyi $P(-5 < X < 4)$? $\phi(0) = \frac{1}{2}, \phi^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}7881$

Megoldás:

$$E(X) = -5$$

$$P(-5 \leq X < 0) = P(X < 0) - P(X < -5) = 0{,}3$$

Ahhoz hogy valószínűséget számoljunk normális eloszlással két paraméter kell, a várható érték és a szórás. A szórás hiányzik, így azt kellene kisakkozni valahogyan. A standard normál eloszlásra konvertálva azt kapjuk, hogy

$$P(-5 \leq X < 0) = P\left(\frac{-5-(-5)}{\sigma} \leq X < \frac{0-(-5)}{\sigma}\right) = P\left(0 \leq X < \frac{5}{\sigma}\right) = P\left(X < \frac{5}{\sigma}\right) - P(X < 0)$$
$$= \phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \phi(0) = \phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 0{,}5 = 0{,}3$$

$$\phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}8$$

$$\frac{5}{\sigma} = 0{,}7881$$

$$\sigma = \frac{5}{0{,}7881} = 6{,}344$$

13. Példa

Egy üteg addig tüzel egy célpontra, amíg el nem találja. A találat valószínűsége minden lövésnél p. Mennyi az egy találathoz szükséges átlagos lőszerkészlet?

Megoldás:

X: a találathoz szükséges lövések száma

A kérdés tkp. $E(X)$. Egyértelmű, hogy a folyamat geometriai eloszlást követ, így $E(X) = \frac{1}{p}$.

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

14. Példa

Létezik-e az $F(x) = x \ln x - x + 1, x \in [1, e]$ eloszlásfüggvényű v.v.-nek második momentuma?

Megoldás:

Akkor létezik 2. momentuma, ha az alábbi integrál létezik:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \ln x$$

Tehát azt kell megvizsgálni, hogy létezik-e

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx$$

$$E(X^2) = \int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Tehát létezik a második momentum.

15. Példa

Legyen $X \in E(0,1)$ és $Y = \lfloor X \rfloor$, azaz X egész része. Mennyi az Y diszkrét v.v. várható értéke és szórása?

Megoldás:

Kihasználjuk azt, hogy $Z = (\lfloor X \rfloor + 1) \in G\left(1 - e^{-\lambda}\right)$. Így tehát $Y = Z - 1$

$$EY = E(Z - 1) = EZ - 1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1$$

$$\sigma^2 Y = \sigma^2 (Z - 1) = \sigma^2 Z = \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{(1 - e^{-\lambda})^2}$$

16. Példa

Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a közelbe és egyszerre tüzel. Mindegyik lövés talál és halálos, de többen is lőhetnek ugyanarra a vadra. Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása?

Megoldás:

X: elfutó szarvasok száma, $X \in \{0,1,2\}$

$$P(X = 2) = \frac{3}{27}$$

$$P(X = 0) = \frac{6}{27}$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = \frac{18}{27}$$

A várható érték def. szerint

$$EX = \sum_{i=0}^{2} iP(X = i) = \frac{18}{27} + 2 \times \frac{3}{27} = \frac{24}{27}$$

$$\sigma^2 X = EX^2 - E^2 X$$

$$EX^2 = \sum_{i=0}^{2} i^2 P(X = i) = \frac{18}{27} + 4 \times \frac{3}{27} = \frac{30}{27}$$

$$\sigma^2 X = \frac{30}{27} - \left(\frac{24}{27}\right)^2 = \frac{26}{81}$$

17. Példa

Van *n* darab szerverünk és *n* darab kliensünk, ahol egy szerver egy klienst képes kiszolgálni. A kliensek ismerik a szerverek listáját, azonban egymással nem tudnak kommunikálni. Az SLA-ban előírtak szerint kötbért kell fizetnünk, ha az átlagos csatlakozási arány nem haladja meg a 60%-ot. Hogy ne minden kliens a listában első helyen szereplő szerverre próbáljon csatlakozni, hanem lehetőleg minél több találjon rögtön párt, azzal az ötlettel álltunk elő, hogy minden kliens válasszon véletlenszerűen egy szervert. Valószínűségszámításban kevésbé edzett, de igencsak akaratos főnökünk azt mondja, hogy az ötlet rossz, mivel egyenletes eloszlás szerint választva a kapcsolódási kísérletek fele sikertelen lesz, így kötbért kellene majd fizetnünk – helyette dolgozzunk inkább ki valami más megoldást. Mivel ez egy könnyen implementálható algoritmus még nem szeretnénk lemondani róla. Döntsük el, hogy alkalmazhatjuk-e ezt az algoritmust, vagy sem!

Megoldás:

Átlagosan legalább 60%-ban sikeresnek kell lennie a kapcsolódási kísérleteknek ahhoz, hogy az algoritmust megtarthassuk. Azt kellene tehát meghatározni, hogy mekkora a sikeres kapcsolódási kísérletek várható értékének és az összes kísérletnek az aránya. Ehhez nyilván a várható értékre lenne szükségünk.

Jelölje Y a sikeres kísérletek számát, X_i pedig legyen indikátorváltozó, ami azt mutatja meg, hogy az *i.* szerverre sikeresen csatlakoztak-e, tehát $X_i \in \begin{cases} 1 & ha\ sikeres \\ 0 & ha\ sikertelen \end{cases}$.

Ekkor $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Nézzük meg a várható értékét:

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(X_i) = 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1) = P(X_i = 1)$$

$P(X_i = 1)$ nehezen számolható, viszont az ellentettje elég egyszerű:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$P(X_i = 0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

(n-1/n annak a valószínűsége, hogy egy kliens az i. szerveren kívül bármelyik másikra csatlakozik; ha minden kliens a maradék n-1 szerverre csatlakozott, akkor az i. szerverre nyilván nem csatlakozott senki)

Tehát

$$P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Visszahelyettesítve:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) = n \times 1 - n \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Már csak azt kellene megnézni, hogy ez hogyan aránylik az összes kísérlethez, ami

$$k = \frac{n + n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}{n} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Mivel tudjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

azt kapjuk, hogy

$$k \to 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$$

Arra jutottunk tehát, hogy az algoritmusunk megfelel az SLA-ban előírtaknak.