Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Nevezetes folytonos eloszlások

Szűk elméleti összefoglaló

Egyenletes eloszlás:

Jelölés: $X \sim U(a,b), a < b$

Tipikus használata: Ha bármilyen hosszúságú intervallumon azonos valószínűséggel vehet föl a val. vált. értéket.

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$F(x;a,b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás:

Jelölés: $X \sim E(\lambda)$

Tipikus használata: Valaminek az élettartamát, vagy egy esemény bekövetkeztéig eltelt időt szokás vele modellezni.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Normális (Gauss) eloszlás:

Jelölés: $X \sim N(\mu, \sigma)$

Tipikus használata: Egy bizonyos átlag (μ) körüli természetes szóródás (σ) modellezésére alkalmazzák. A természetben megfigyelhető események nagyja ide tartozik.

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x;\mu,\sigma) = \phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Az $N(0,1)$ (azaz 0 várható értékű, 1 szórású) normális eloszlást szokás standard normális eloszlásnak nevezni.

Fontos tulajdonságai:

a) a sűrűségfüggvénye szimmetrikus (az átlagtól jobbra vagy balra ugyanakkora mértékkel ugyanakkora valószínűséggel tér el az eloszlás)
b) $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$ (szintén a szimmetria)
c) $\phi_{\mu,\sigma}(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, azaz bármelyik normális eloszlás visszavezethető a standard normális eloszlásra (ezt a folyamatot hívjuk normalizálásnak/standardizálásnak is)

ZH és vizsga feladatok

1. Példa

Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = \sqrt{5X+1}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

Megoldás:

A kérdés $f_Y(t)$ meghatározása, ám ehhez először $F_Y(t)$ szükséges, hogy azt lederiválva megkapjuk. Először adjuk meg Y értékkészletét: $Y = \left[1, \sqrt{6}\right]$ (X minimumát és maximumát Y-ba behelyettesítve).

Amit keresünk, az $F_Y(t) = P(Y < t)$. Y eloszlásáról bővebb információnk nincs, csak X-ét ismerjük, így ki kell fejeznünk Y eloszlását X-ével. Ez azt jelenti, hogy úgy kell átrendezni az egyenlőtlenséget, hogy a bal oldalán csak X szerepeljen.

$$P(Y < t) = P\left(\sqrt{5X+1} < t\right) = P(5X + 1 < t^2) = P(5X < t^2 - 1) = P\left(X < \frac{t^2-1}{5}\right)$$
$$= F_X\left(\frac{t^2-1}{5}\right), t \in [1, \sqrt{6}]$$

X eloszlásfüggvényét ismerjük, ebbe csak be kell helyettesítenünk:

$$F_Y(t) = F_X\left(\frac{t^2-1}{5}\right) = F\left(\frac{t^2-1}{5}; 0, 1\right) = \frac{\frac{t^2-1}{5} - 0}{1-0} = \frac{t^2-1}{5}$$

Ebből

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{2t}{5}$$

2. Példa

Legyen $X \sim N(8,3)$. Fejezze ki a $P(11 \leq X \leq 17)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével!

Megoldás:

$$P(11 \leq X \leq 17) = P(X \leq 17) - P(X \leq 11) = F(17) - F(11) = \phi_{8,3}(17) - \phi_{8,3}(11)$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Normalizálással minden normál eloszlás standard alakra hozható:

$$\phi_{8,3}(17) - \phi_{8,3}(11) = \phi\left(\frac{17-8}{3}\right) - \phi\left(\frac{11-8}{3}\right) = \phi(3) - \phi(1)$$

3. Példa

Legyen X valószínűségi változó 2 paraméterű exponenciális eloszlású és legyen $V = X^2 + 3$. Adja meg V sűrűségfüggvényét!

Megoldás:

Ugyanúgy, mint az 1. példánál.

$$f_V(t) = F_V{}'(t)$$

$$F_V(t) = P(V < t) = P(X^2 + 3 < t) = P\left(X < \sqrt{t-3}\right) = F_X\left(\sqrt{t-3}\right)$$

$$F_X\left(\sqrt{t-3}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-2\sqrt{t-3}}, & \sqrt{t-3} > 0 \\ 0, & \sqrt{t-3} \leq 0 \end{cases}, t \in (3, \infty)$$

Itt az alsó ág elhagyható, mivel négyzetgyökvonás eredménye nem lehet negatív.

$$f_V(t) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t-3}} \times e^{-2\sqrt{t-3}}$$

4. Példa

Egy berendezésben három alkatrészt kapcsoltak össze sorosan. Ha az alkatrészek közül bármelyik meghibásodik, akkor a berendezés megáll. Adja meg a berendezés élettartamának eloszlását, ha a komponenseinek élettartamai egymástól függetlenül $\lambda_i = i, i = 1,2,3$ paraméterű exponenciális eloszlást követnek!

Megoldás:

Jelölje Y a berendezés, X_i pedig az *i*. komponens működési idejét. $X_i \sim E(\lambda_i)$, függetlenek. A soros kapcsolás miatt $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$.

Annak a valószínűsége, hogy a berendezés t időnél hamarabb leáll egyenlő azzal, hogy az összes esetből kivonjuk azt, amikor mindhárom alkatrész tovább húzza t-nél, azaz

$$P(Y < t) = 1 - P(X_1 \geq t, X_2 \geq t, X_3 \geq t)$$

Az alkatrészek függetlensége miatt ez

$$\begin{aligned} P(Y < t) = 1 - P(X_1 \geq t)P(X_2 \geq t)P(X_3 \geq t) \\ &= 1 - \big(1 - P(X_1 < t)\big)\big(1 - P(X_2 < t)\big)\big(1 - P(X_3 < t)\big) \\ &= 1 - \big(1 - (1 - e^{-t})\big)\big(1 - (1 - e^{-2t})\big)\big(1 - (1 - e^{-3t})\big) = 1 - e^{-6t}, t > 0 \end{aligned}$$

Azaz $Y \sim E(6)$.

5. Példa

Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{X}{Y+1}$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Megoldás:

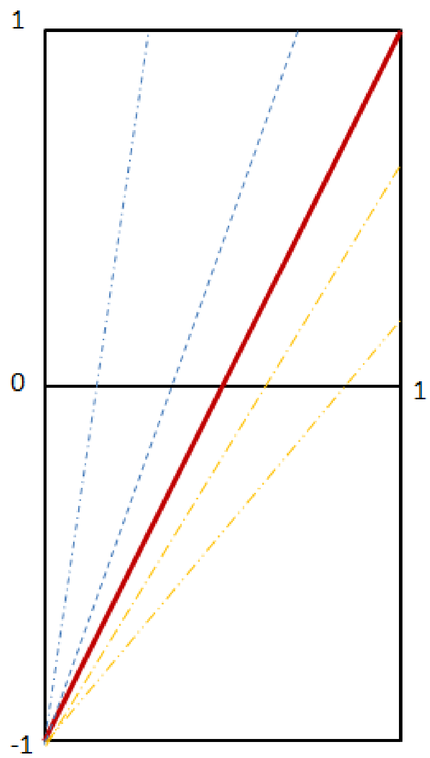
Először nézzük meg szokásosan az értékkészletet. $Z \in (0,1)$

Itt nem lesz elég csak X-re vagy Y-ra átrendezni a belső kifejezést, hanem geometriai módszerrel kell megvizsgálni.

$$F_Z(t) = P(Z < t) = P\left(\frac{X}{Y+1} < t\right) = P\left(\frac{X}{t} - 1 < Y\right)$$

Ebből leolvashatjuk, hogy keressük azt a térrészt, ahol $\frac{X}{t} - 1 < Y$ teljesül. Látszik, hogy t-től függ, hogy mekkora lesz az érintett térrész, nézzük meg milyen kapcsolat van közöttük.

Az alábbi ábrán látható, hogy az $\frac{X}{t} - 1 = Y$ egyenes hogyan alakul különböző t-ket választva (mivel az efölötti pontokat tartalmazó területet keressük). A piros vonal *t=0,5*, a kék vonalak $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, a narancssárga vonalak $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ esetén adódnak (az alsó négyzet csak az ábrázolás könnyítését szolgálja, a nekünk szükséges tartomány a fenti egységnégyzet).



Észrevehetjük, hogy ha $t \in (0, \frac{1}{2})$, akkor mindig egy trapéz területe az érdekes számunkra, míg $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ esetén egy ötszögé.

Nézzük először $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ esetét! A trapéz alsó szakaszának a hosszát megkapjuk, ha megnézzük hol metszi az egyenes az X tengelyt. Ez Y=0-nál következik be, tehát X-et

$\frac{X}{t} - 1 = Y \rightarrow X = t(Y+1) = t(0+1) = t$-nél metszi.

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

A fölső szakaszt hasonlóan kapjuk meg, itt arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen X esetén lesz Y=1, tehát

$$X = t(Y+1) = 2t$$

A trapéz területét megkapjuk, mint egy $t \times 1$ területű téglalap, illetve $\frac{(2t-t)\times 1}{2}$ területű háromszög összege. Összegezve:

$$F_Z(t) = P(Z < t) = t + \frac{t}{2} = \frac{3t}{2}, t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Nézzük meg most $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ esetét!

Az ötszög területét úgy kapjuk meg legkönnyebbe, ha inkább a teljes területből kivonjuk a jobb-alul keletkező háromszög területét. Azt már tudjuk, hogy a háromszög aljának hossza 1-t (mivel az egyenes t-nél metszi X-et, de nekünk nem a baloldali, hanem a jobboldali hossz érdekes). Meg kell még kapnunk a háromszög másik befogóját, ami egyenlő azzal a kérdéssel, hogy X=1 esetén Y értéke mennyi, tehát

$\frac{X}{t} - 1 = Y \rightarrow Y = \frac{1}{t} - 1$

Ebből a háromszög területe

$$\frac{(1-t)\left(\frac{1}{t}-1\right)}{2}$$

Tehát föl tudjuk írni a hátralevő részét is az eloszlásfüggvénynek:

$$F_Z(t) = 1 - \frac{(1-t)\left(\frac{1}{t}-1\right)}{2}, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

6. Példa

Legyen $X \sim U(-1{,}2)$ és $Y = X^3$. Adja meg Y eloszlásfüggvényét!

Megoldás:

Szokásosan, először megadjuk Y értékkészletét, $t \in (-1{,}8)$.

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^3 < t) = P\left(X < \sqrt[3]{t}\right) = F_X\left(\sqrt[3]{t}\right)$$

$$F_X\left(\sqrt[3]{t}\right) = F\left(\sqrt[3]{t}; -1, 2\right) = \frac{\sqrt[3]{t} - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{\sqrt[3]{t} + 1}{3}, t \in (-1{,}8)$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

7. Példa

Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7}, x \in [1,2]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen *f(x)*!

Megoldás:

Most visszafelé fogjuk csinálni az eloszlásfüggvény transzformációt. Először írjuk föl az *f(x)*-ből kapható eloszlásfüggvényt:

$$F(x) = \int_1^x \frac{3t^2}{7} dt = \left[\frac{t^3}{7}\right]_1^x = \frac{x^3}{7} - \frac{1}{7}$$

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye $\frac{x-a}{b-a}$ alakú, így erre kellene átalakítani a fentieket, tudva, hogy a=0, b=1.

$$\frac{\left(\frac{x^3-1}{7}\right)-0}{1-0} \rightarrow P\left(X < \frac{t^3-1}{7}\right) = P(7X < t^3 - 1) = P(7X + 1 < t^3) = P\left(\sqrt[3]{7X+1} < t\right) = P(Y < t)$$

Tehát $Y = \sqrt[3]{7X + 1}$.

8. Példa

Egy automata zacskókban cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 250$ és $\sigma = 4$ paraméterű normális eloszlásúnak tekintjük. Mennyi a valószínűsége, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, aminek a súlya 220 és 260 gramm közé fog esni?

Megoldás:

$$X \sim N(250,4)$$

Jelölje *p* annak a valószínűségét, hogy egy zacskó súlya 220 és 260 gramm közé esik:

$$p = P(220 \le X \le 260) = P(X \le 260) - P(X \le 220) = \phi\left(\frac{260 - 250}{4}\right) - \phi\left(\frac{220 - 250}{4}\right)$$

Annak a valószínűsége, hogy három zacskóból legalább 1-re teljesül macerásabban számolható, mint a komplementer esemény, ami itt az, hogy egyik zacskóra sem teljesül. Így

$$P(Y > 0) = 1 - (1 - p)^3$$

9. Példa

Tekintsük az $f(x) = x - \frac{3}{2}, x \in [2,3]$ sűrűségfüggvényt. Az $X \sim U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen *f(x)*.

Megoldás:

Mint korábban, most is fordítva kell az eloszlásfüggvényt transzformálni. Először állítsuk elő az eloszlásfüggvényt:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$F(x) = \int_2^x t - \frac{3}{2} dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}t\right]_2^x = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - (-1)$$

Az X eloszlásfüggvénye $\frac{x-a}{b-a}$ alakú, ahol most a=0, b=1, tehát X eloszlásfüggvénye *x*-re egyszerűsödik.

$$F_X(x) = \frac{\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2}\right) - 0}{1 - 0}$$

$$F_X(t) = P\left(X < \frac{t^2 - 3t + 2}{2}\right) = P(2X < t^2 - 3t + 2) = P(2X < (t - 1{,}5)^2 - 0{,}25)$$
$$= P(2X + 0{,}25 < (t - 1{,}5)^2) = P\left(\sqrt{2X + 0{,}25} + 1{,}5 < t\right) = P(Y < t)$$

Tehát $Y = \sqrt{2X + 0{,}25} + 1{,}5$.

10. Példa

Egy automata gép 2 kg liszt feliratú zacskókba adagol X mennyiségű lisztet, ahol $X \in N(m,\ 0{,}002)$. Minőségi követelmény, hogy 99% bizonyossággal a zacskó liszt tartalma ne legyen kevesebb 2 kg-nál. Mekkorára állítsák m-et, hogy ez teljesüljön? Segítség: $\phi(2{,}33) \approx 0{,}99$.

Megoldás:

A feladat szövegéből a kérdés, hogy milyen m mellett lesz $P(X < 2) \leq 0{,}01$.

$$P(X < 2) = F_X(2) = \phi\left(\frac{2 - m}{0{,}002}\right) = 0{,}01$$

Kihasználva, hogy $\phi(t) = 1 - \phi(-t)$ azt kaphatjuk, hogy $1 - \phi\left(\frac{m-2}{0{,}002}\right) = 0{,}01$, amiből

$\phi\left(\frac{m-2}{0{,}002}\right) = 0{,}99$. Így megkapjuk, hogy

$2{,}33 \approx \frac{m-2}{0{,}002}$, azaz $m \approx 2{,}33 \times 0{,}002 + 2 = 2{,}00466$

11. Példa

A (0,1) intervallumon kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont 1-től való távolságának eloszlását!

Megoldás:

Kiválasztunk 3 pontot, jelöljük ezeket x,y és z-vel. Ekkor az alábbi esetek fordulhatnak elő: x<y<z, x<z<y, y<x<z, y<z<x, z<x<y, valamint z<y<x. Szokásosan vizsgáljuk meg az egyik esetet!

Tfh x<y<z. Amire kíváncsiak vagyunk, az $F_Y(t) = P(Y < t), t \in (0{,}1)$. Ez az egységkockának az a térfogat része, ahol 0 < y < t, 0 < x < y, valamint y < z < 1.

$$F_Y(t) = \int_0^t \int_0^y \int_y^1 dz\, dx\, dy = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

A másik 5 esetben hasonlóan kellene felírnunk az integrálokat, csak fölcserélődnének a változók határai, így ugyanerre az eredményre vezetnének, tehát az eddigi eloszlásfüggvényt 6-tal megszorozva megkapjuk a véglegeset:

$$3t^2 - 2t^3$$

12. Példa

Az $X \in U(0,1)$ v.v. segítségével konstruáljunk $Y \in G(0,25)$ eloszlású v.v.-t!

Megoldás:

Ismételten generáljunk $U(0,1)$ számokat, amíg 0,25-nél kisebbet nem kapunk. Y jelölje az ehhez szükséges generálások számát. Ekkor látható, hogy Y valóban G(0,25) eloszlású, mivel egy esemény első bekövetkezéséhez szükséges húzások számára vagyunk kíváncsiak, ahol $p = P(0 \le X < 0{,}25) = P(X < 25) = 0{,}25$.

13. Példa

Legyenek $X \in N(m, D)$ és $Z = \left(\frac{X-m}{D}\right)^2$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

Megoldás:

Eléggé szemet szúró, hogy Z az X változó standard normális eloszlásra transzformáltjának a négyzete.

$$\frac{X-m}{D} \in N(0,1)$$

$$\begin{aligned}
F_Z(t) = P(Z < t) = P\left(\left(\frac{X-m}{D}\right)^2 < t\right) = P\left(\left|\frac{X-m}{D}\right| < \sqrt{t}\right) = P\left(-\sqrt{t} < \frac{X-m}{D} < \sqrt{t}\right) \\
= P\left(\frac{X-m}{D} < \sqrt{t}\right) - P\left(\frac{X-m}{D} < -\sqrt{t}\right) = \phi(\sqrt{t}) - \phi(-\sqrt{t}) \\
= \phi(\sqrt{t}) - \left(1 - \phi(\sqrt{t})\right) = 2\phi(\sqrt{t}) - 1
\end{aligned}$$

$$f_Z(t) = \frac{d}{dt}F_Z(t) = 2\varphi(\sqrt{t}) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}}$$