Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Valószínűségi változó, sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény

Szűk elméleti összefoglaló

Valószínűségi változó: egy függvény, ami az eseményteret a valós számok halmazára tudja vetíteni. A val. változó diszkrét, ha az értékkészlete megszámlálható, egyébként folytonos.

Pl.: dobjunk föl egy pénzérmét 10-szer. Jelölje X a fej dobások számát. Ekkor X a valós számok halmazán veszi föl az értékkészletét, illetve az összes eseményt át is vetíti.

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = P(X = k)$, azaz a sűrűségfüggvény azt mutatja meg, hogy a valószínűségi változó egy bizonyos értéket mekkora valószínűséggel vesz föl (folytonos esetben pontosan egy adott érték felvételének a valószínűsége 0, így itt úgy szoktuk értelmezni, hogy az adott érték nagyon kicsi, közvetlen környezetébe esne egy pont ekkora valószínűséggel).

Az eddigi X-nél maradva $f_X(x), x = 0,1,2, \dots 10$:

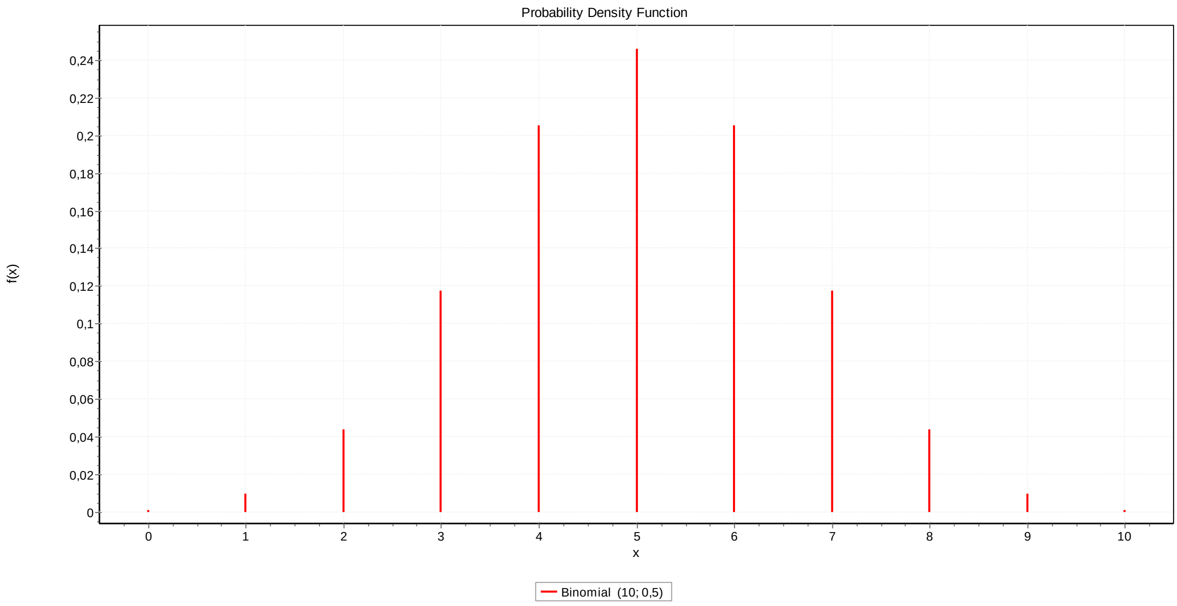
$$f_X(0) = \binom{10}{0} \frac{1}{2}^{10} \frac{1}{2}^{0}$$

$$f_X(1) = \binom{10}{1} \frac{1}{2}^{9} \frac{1}{2}^{1}$$

$$f_X(2) = \binom{10}{2} 0{,}5^8 0{,}5^2$$

$$f_X(10) = \binom{10}{10} 0{,}5^0 0{,}5^{10}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu



Sűrűségfüggvény alapvető tulajdonságai:

a) $f_X(x) \geq 0$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Az eloszlásfüggvény azt mutatja meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó egy adott értéknél kisebbet vesz föl, azaz

$$F_X(x) = P(X < x)$$

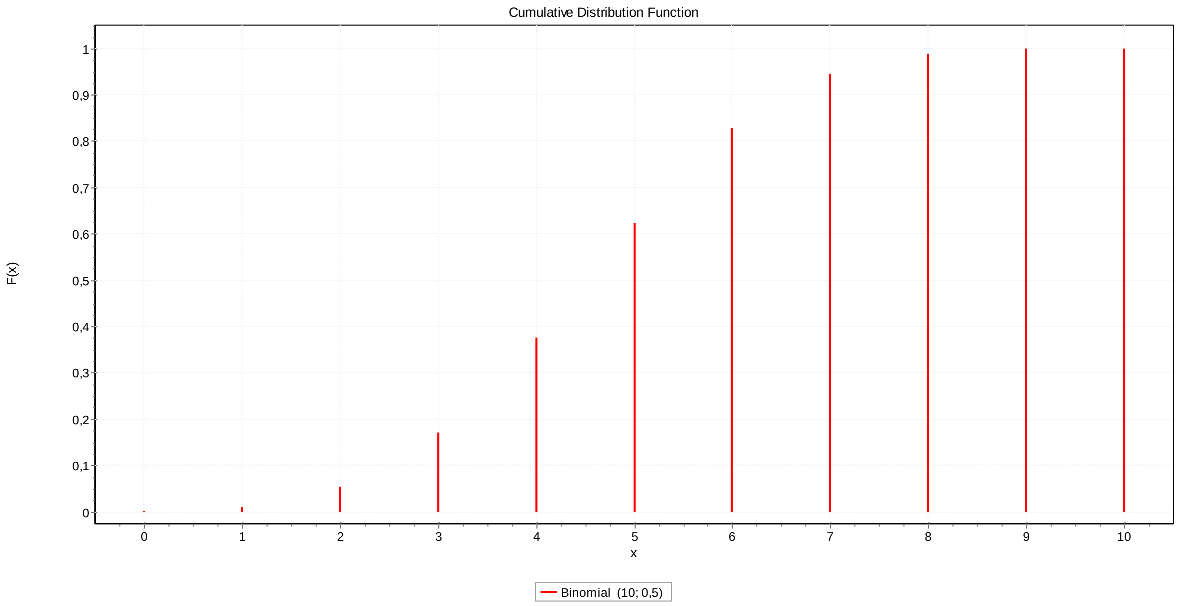
Diszkrét esetben ez nyilván az x-nél kisebb értékekhez tartozó valószínűségek összege, folytonos esetben azok integrálja adja meg.

a) Diszkrét eset: $F_X(x) = \sum_{k<x} f_X(k)$
b) Folytonos eset: $F_X(x) = \int_{k<x} f_X(k)dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$
c) Megfordítva: a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja

Sűrűségfüggvényről diszkrét esetben nem igazán szoktunk beszélni, ott eloszlásnak hívjuk, de a koncepció alapvetően ugyanaz.

Korábbi kockadobós probléma eloszlásfüggvénye:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu



Fontosabb szabályok:

a) $P(x \leq X < y) = F_X(y) - F_X(x)$
b) $P(x < X < y) = F_X(y) - F_X(x+0)$
c) $P(x \leq X \leq y) = F_X(y+0) - F_X(x)$
d) $P(x < X \leq y) = F_X(y+0) - F_X(x+0)$

Eloszlásfüggvény alapvető tulajdonságai:

a) monoton nemcsökkenő
b) balról folytonos
c) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
d) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

A valószínűségi változó minden lehetséges értékének valószínűségeit összeadva 1-et kell kapnunk:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Azaz egy sűrűségfüggvényt a teljes értékkészleten integrálva 1-et kell kapnunk.

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Feladatok

Bevezető feladatok

1. Példa

Egy játszóházba 3-7 éves korig lehet gyerekeket vinni. A következő eloszlásfüggvény megadja az adott időpontban ott tartózkodó, különböző korcsoportú gyerekek kumulált arányát.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ 0{,}2, & 3 < x \leq 4 \\ 0{,}4, & 4 < x \leq 5 \\ 0{,}5, & 5 < x \leq 6 \\ 0{,}7, & 6 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

Számítsa ki a következő valószínűségeket:

a) $P(X = 4)$

$$P(X = 4) = F(5) - F(4) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$$

b) $P(X < 5{,}5)$

$$P(X < 5{,}5) = F(5{,}5) = 0{,}5$$

c) $P(3{,}5 \leq X \leq 6{,}2)$

$$P(3{,}5 \leq X \leq 6{,}2) = P(X \leq 6{,}2) - P(X \leq 3{,}5) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$$

2. Példa

Egy kockával dobunk. Jelölje X a dobott szám értékét. Adja meg az $Y = |X - 3|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

Megoldás:

Y értékkészlete {2,1,0,3}

$$P(Y = 2) = P(X = 1) + P(X = 5) = \frac{2}{6}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{2}{6}$$

$$P(Y = 0) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 3) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Ezekből pedig

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{6}, & 1 < y \le 2 \\ \frac{3}{6} + \frac{2}{6}, & 2 < y \le 3 \\ \frac{5}{6} + \frac{1}{6}, & y > 3 \end{cases}$$

3. Példa

Adjuk meg a 90/5-ös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényét a 10π helyen!

Megoldás:

Jelölje X a legkisebb kihúzott lottószámot.

$P(X < 10\pi) = P(X \le 31)$, mivel csak egész számokkal tudunk ebben a diszkrét esetben dolgozni. Az, hogy a legkisebb szám kisebb, mint 31 azzal ekvivalens, hogy az összes esetből kivonjuk azokat, amikor mind az 5 szám a [32,90] tartományból származik.

$$P(X \le 31) = 1 - \frac{\binom{90-31}{5}}{\binom{90}{5}}$$

4. Példa

Kiválasztunk 5 kártyát visszatevés nélkül véletlenszerűen egy csomag magyar kártyából. Az X valószínűségi változó jelentse a kiválasztott ászok számát:

a) Adja meg X valószínűség-eloszlásának táblázatát!

X értékkészlete: $X \in \{0,1,2,3,4\}$

$$P(X = x) = \frac{\binom{32-4}{5-x}\binom{4}{x}}{\binom{32}{5}}$$

Ebből a valószínűségek:

x	P(x)
0	0,4881
1	0,4067
2	0,0976
3	0,0075
4	0,0001

b) Írja föl az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}4881, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}8948, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}9924, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}9999, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb kétszer választunk ászt?

$$P(X \le 2) = P(X < 3) = F(3) = 0{,}9924$$

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott ászok számra páratlan?

$$P(X\ páratlan) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}4067 + 0{,}0075$$

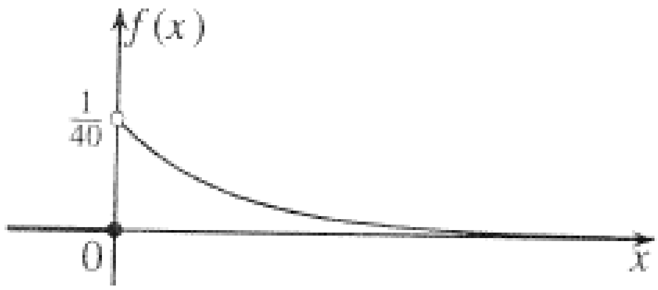
5. Példa

Egy elromlott személygépkocsi javításához szükséges időtartam egy X valószínűségi változónak tekinthető, amelynek sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

ahol x a javítás befejezéséig szükséges időtartam hosszát jelöli órákban kifejezve.

a) Ábrázolja a sűrűségfüggvényt!



b) Adja meg X eloszlásfüggvényét!

$x \le 0$ esetben:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$$

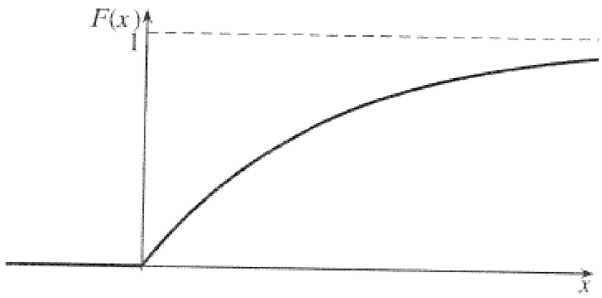
$x > 0$ esetben:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{40}e^{-\frac{t}{40}}dt=0+(-1)\int_{0}^{x}-\frac{1}{40}e^{-\frac{t}{40}}dt=-\left[e^{-\frac{t}{40}}\right]_0^x$$
$$=-\left(e^{-\frac{x}{40}}-1\right)=1-e^{-\frac{x}{40}}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{40}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

c) Ábrázolja az eloszlásfüggvényt!



d) Számítsa ki a következő valószínűségeket! $P(X\le 8), P(X\ge 24), P(24<X\le 48)$

Folytonos val. vált. esetén mindegy, hogy az intervallum végpontját hozzávesszük-e az intervallumhoz (mivel egy adott pont valószínűsége 0)

$$P(X\le 8)=P(X<8)=F(8)=1-e^{-\frac{8}{40}}=0{,}1813$$

$$P(X\ge 24)=1-P(X<24)=1-F(24)=1-\left(1-e^{-\frac{24}{40}}\right)=0{,}5488$$

$$P(24<X\le 48)=P(X<48)-P(X<24)=F(48)-F(24)=0{,}2476$$

6. Példa

Adott egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ (x-1)^3, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

a) Írja föl X sűrűségfüggvényét!

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 3(x-1)^2, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy X nagyobb mint -0,5 és kisebb mint 1,5?

$$P(-0{,}5<X<1{,}5)=P(X<1{,}5)-P(X<-0{,}5)=F(1{,}5)-F(-0{,}5)=(1{,}5-1)^3-0$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

7. Példa

Lehet-e az $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le \frac{1}{2} \\ \frac{4x-1}{4x+4}, & x>\frac{1}{2} \end{cases}$ függvény egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

Megoldás:

Ellenőrizzük, hogy az eloszlásfüggvények alapvető tulajdonságai teljesülnek-e!

a) monoton nemcsökkenő?

Ez láthatóan teljesül $x \le 0$ és $0 < x < 0{,}5$ tartományokon. x > 0,5 esetén

$\left(\frac{4x-1}{4x+4}\right)' = \frac{4(4x-4)-(4x-1)4}{(4x+4)^2} = \frac{20}{(4x+4)^2} \ge 0$, tehát nem csökken itt sem. Azonban a töréspontok két oldalát is meg kell majd vizsgálni, mivel itt előfordulhat szakadás.

b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$?

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$$

c) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$?

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-1}{4x+4} = 1$$

d) balról folytonos?

Két töréspont van, x=0 és x=1/2. Ennek a két pontnak a bal és jobboldali határértékét kell összehasonlítanunk.

x=0:

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

x=0,5:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}-} F(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}-} x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}+} F(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}+} \frac{4x-1}{4x+4} = \frac{1}{6}$$

Látható, hogy a függvény balról folytonos, azonban x=0,5-nél a szakadás csökkenő, márpedig az eloszlásfüggvények esetén csak nemcsökkenő tendencia engedhető meg, tehát ez a függvény nem eloszlásfüggvény!

8. Példa

Állapítsa meg, hogy az alábbi függvény lehet-e sűrűségfüggvény:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$f(x)=\begin{cases}2^x\ln 2, & \mathrm{x}<-1\\ 3x^2, & -1<x<2^{\frac{1}{3}}\\ 0, & x>2^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

Megoldás:

Ellenőrizzük, hogy a sűrűségfüggvények alapvető tulajdonságai teljesülnek-e rá!

a) $f_X(x)\geq 0$?

Ez láthatóan teljesül, semelyik tartományban nem tudunk negatív értéket kapni.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{-1} 2^x ln2\, dx+\int_{-1}^{2^{-\frac{1}{3}}} 3x^2\, dx+\int_{2^{-\frac{1}{3}}}^{\infty} 0\, dx=\lim_{b\to\infty}[2^x]_{-b}^{-1}+[x^3]_{-1}^{2^{-\frac{1}{3}}}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^b}\right)+\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)=\frac{1}{2}+1{,}5=2$$

Így ez nem lehet sűrűségfüggvény.

9. Példa

Az *a* paraméter mely értéke mellett lehet az alábbi függvény sűrűségfüggvény?

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{a}{(1-x)^2}, & x>2\end{cases}$$

Megoldás:

Az *f(x)* integrálja 1-et kell adjon, így tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{2} 0\, dx+\int_{2}^{\infty}\frac{a}{(1-x)^2}dx=a\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}(1-x)^{-2}dx=a\lim_{b\to\infty}[(1-x)^{-1}]_2^b$$
$$=a\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-b}-\frac{1}{-1}\right)=a$$

Tehát $a=1$ esetén lehet sűrűségfüggvény (persze ez önmagában még nem elég ahhoz, hogy valóban sűrűségfüggvény is legyen, de a kérdés az volt mikor *lehet*, nem pedig hogy mikor lesz biztosan az).

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

ZH és vizsga feladatok

10. Példa

Adjuk meg a 90/5-ös lottón kihúzott öt szám közül a második legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 10π helyen.

Megoldás:

Jelölje X a második legkisebb kihúzott számot.

$$F_X(10\pi) = P(X < 10\pi)$$

Mivel X csak egész szám lehet, így $P(X < 10\pi) = P(X \leq 31)$

X legalább 2 kell hogy legyen, különben nem lehetne a második legkisebb. Tfh. X = 2, az első számjegy így kötött, a maradék 3 pedig a [3,90] tartományból kerül ki visszatevés nélküli húzással, azaz

$$P(X = 2) = \frac{1 \times 1 \times \binom{90-2}{3}}{\binom{90}{5}}$$

Tfh. X = 3, ekkor az első szám lehet kétféle, a maradék 3 pedig a [4,90] tartományból kerül ki, azaz

$$P(X = 3) = \frac{2 \times 1 \times \binom{90-3}{3}}{\binom{90}{5}}$$

Általánosan megfogalmazva tehát

$$P(X = i) = \frac{(i-1) \times 1 \times \binom{90-i}{3}}{\binom{90}{5}}, i = 2,3, \dots 87$$

Ez tkp. az eloszlás, ebből fölírhatjuk az eloszlásfüggvényt:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=2}^{k} P(X = i)\, , k = 3,4, \dots 88$$

A megfelelő helyen kiértékelve:

$$F_X(10\pi) = P(X < 31.4) = P(X < 32) = P(X \leq 31)$$

11. Példa

Egy dobozban 3 piros, 4 fehér és 2 zöld golyó van. Háromszor végrehajtjuk ugyanazt a kiválasztást: kiveszünk egyszerre 3 golyót és feljegyezzük a pirosak számát, majd visszahelyezzük a golyókat a következő húzás előtt. Jelölje X_i az i. kiválasztáskor kapott piros golyók számát. Adja meg $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ eloszlását!

Megoldás:

Y értékkészletét vizsgálva azt látjuk, hogy $Y \in \{0,1,2,3\}$. Tehát meg kell határoznunk a $P(Y = 0), P(Y = 1), P(Y = 2)$ és $P(Y = 3)$ valószínűségeket először, de ehhez kellenek az egyes X_i valószínűségek:

$$P(X_i = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}}, P(X_i = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}, P(X_i = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{6}{1}}{\binom{9}{3}}, P(X_i = 3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}$$

Y=0 akkor lehetséges, ha egyik húzásban sem volt piros. Mivel az egyes húzások függetlenek, így ennek a valószínűsége az egyes húzások valószínűségeinek a szorzata:

$$P(Y = 0) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \times P(X_3 = 0)$$

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1} P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) + \binom{3}{2} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + \binom{3}{3} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$$

$$\begin{aligned} P(Y = 2) = \binom{3}{1} P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 0) + \binom{3}{1}\binom{2}{1} P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0) \\ + \binom{3}{1}\binom{2}{2} P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) + \binom{3}{2} P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 0) \\ + \binom{3}{2}\binom{1}{1} P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) + \binom{3}{3} P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2) \end{aligned}$$

$$P(Y = 4) = 1 - \big(P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)\big)$$

12. Példa

Az A paraméter mely értékénél lesz az $f(x) = Ae^{-3(x+1)^2}, x \in R$ függvény sűrűségfüggvény?

Megoldás:

Egy függvény akkor sűrűségfüggvény, ha a teljes tartományon kiintegrálva 1-et ad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-3(x+1)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{3}} A = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

Ehhez viszont magic integrálási skillek kellenek. Ha azunk nincs, de ismerjük a normál eloszlást, akkor észrevehetjük, hogy

$$f(x) = Ae^{-3(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ebből leolvashatjuk, hogy $\mu = -1$ és $3 = \frac{1}{2\sigma^2} \rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$Ae^{-3(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{6}}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$A\left(\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)e^{-3(x+1)^2} = e^{-3(x+1)^2}$$

$$A\left(\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1$$

$A\left(\sqrt{\frac{2\pi}{6}}\right) = A\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$

13. Példa

Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztást X jelöli ezer literben, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mekkora legyen a tartály *K* kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin kisebb legyen 0,01-nél?

Megoldás:

Keressük azt a *K*-t, amire $P(X > K) < 0{,}01$.

$$P(X > K) = \int_K^1 f(x)dx < 0{,}01$$

$$\int_K^1 5(1-x)^4\,dx = [-(1-x)^5]_K^1 = 0 - (-[1-K]^5) = (1-K)^5$$

$(1-K)^5 < 0{,}01 \rightarrow K > 1 - \sqrt[5]{0{,}01}$

14. Példa

Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott 5 szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 25 helyen!

Megoldás:

$$P(X < 25) = \sum_{i=1}^{24} P(X = i) = \sum_{i=1}^{24} \frac{\binom{90-i}{4}}{\binom{90}{5}}$$