Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Feltételes valószínűség

Szűk elméleti összefoglaló

1. $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
2. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
3. $P(A|A) = 1$
4. $P(A|\emptyset) = 0$
5. egymást kizáró események esetén: $P(\sum A_I \,|B) = \sum P(A_i|B)$
6. A és B események függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \times P(B)$
7. Ha A és B független, akkor $P(A|B) = P(A)$ és $P(B|A) = P(B)$
8. Az $A_1, A_2, \dots A_n$ események páronként függetlenek, ha $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \forall i \neq j$
9. Az $A_1, A_2, \dots A_n$ események teljesen függetlenek, ha $P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$

Szorzási szabály: $A_1, A_2, \dots A_n$ eseményekre legyen igaz, hogy $P(\prod A_i) > 0$. Ekkor

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \middle| \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_{n-1} \middle| \prod_{i=1}^{n-2} A_i\right) \dots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

Egyszerűsített alakja:

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

$$P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

Teljes valószínűség tétele: alkosson $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ teljes eseményrendszert, és legyen $P(A_i) > 0$. Ekkor egy tetszőleges B eseményre

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)\,P(A_i)$$

Bayes-tétel:

$$\boldsymbol{P}(A_i|B) = \frac{\boldsymbol{P}(B|A_i)\boldsymbol{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

Egyszerűsített alakja:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Bevezető feladatok

1. Példa

A Zsolnay porcelángyár raktárában háromféle kézzel festett kávéskészlet található külsőleg egyforma csomagolásban, fajta és osztályba sorolás megjelöléssel. Az egyes fajtákból I. és II. osztályú termékeket tartanak nyilván az alábbiak szerint:

	Kék virágos	Színes virágos	Pompadur	Összesen
I. osztályú	30	45	65	140
II. osztályú	5	10	25	40
Összesen	35	55	90	180

Véletlenszerűen kiválasztunk egy készletet a raktárban ezek közül. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a kiválasztott esemény *i*-edik fajta, B_j pedig hogy *j*-edik osztályba sorolják. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

a) $\mathrm{P(B_1)}$

$$\mathrm{P(B_1)} = \frac{140}{180}$$

b) $\mathrm{P(A_2)}$

$$\mathrm{P(A_2)} = \frac{55}{180}$$

c) $\mathrm{P(A_1A_2)}$

$$\mathrm{P(A_1A_2)} = 0$$

d) $\mathrm{P(A_1 + A_2)}$

$$\mathrm{P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)} = \frac{35+55}{180}$$

(Poincare-tételt kihasználva, de mivel $\mathrm{A_1}$ és $\mathrm{A_2}$ egymást kizáró események, így rögtön fölírhattuk volna a két valószínűség összegeként 5. alapján)

e) $\mathrm{P(A_1|B_1)}$

$$\mathrm{P(A_1|B_1)} = \frac{\mathrm{P(A_1B_1)}}{\mathrm{P(B_1)}} = \frac{30}{140}$$

f) $\mathrm{P(B_2|A_1)}$

$$\mathrm{P(B_2|A_1)} = \frac{\mathrm{P(B_2A_1)}}{\mathrm{P(A_1)}} = \frac{5}{35}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

g) $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}_2)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)} = \frac{5}{40}$$

h) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_2}|\mathrm{A}_1)$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_2}|\mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_2}\mathrm{A}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} = \frac{30}{35}$$

i) $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3|\mathrm{B}_1)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3|\mathrm{B}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_3|\mathrm{B}_1) = \frac{30}{140} + \frac{65}{140}$$

(itt is kihasználtuk 5.-öt, mivel A_1 és A_3 egymást kizáró)

j) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3}|\mathrm{B}_2)$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3}|\mathrm{B}_2) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}\overline{\mathrm{A}_3}|\mathrm{B}_2) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}\overline{\mathrm{A}_3}\mathrm{B}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)} = \frac{10}{40}$$

2. Példa

Egy cipőket gyártó cég termékeiből álló szállítmány 5%-a selejtes, a nem selejtesek ötöde II. osztályú, a többi I. osztályú. Mennyi a valószínűsége, hogy egy pár cipőt kiválasztva az I. osztályú lesz?

Megoldás:

Jelölje S azt, hogy egy cipő selejt; M, hogy másodosztályú; E, hogy első osztályú.

$$P(S) = 0.05$$

$$P(M|\bar{S}) = 0.2$$

$$P(E|\bar{S}) = P(\bar{M}|\bar{S}) = 1 - P(M|\bar{S}) = 0.8$$

$$P(E) = P(E|S)P(S) + P(E|\bar{S})P(\bar{S}) = 0 + 0.8 \times 095.$$

Itt a teljes valószínűség tételét kellett kihasználnunk.

3. Példa

Egy felmérés adatait négy rögzítő munkatárs viszi föl számítógépre. Az első munkatárs 310, a második 230, a harmadik 250, a negyedik pedig 210 adatot rögzít 10 perc alatt. A négy fő rendre 1, 3, 2 és 4% hibát vét. 10 perc elteltével ellenőrizzük a megbízhatóságukat, egy adatot véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) hibás

Jelölje H hogy hibásat húzunk. Jelölje $\mathrm{M}_\mathrm{i}, \mathrm{i} = 1,2,3,4$ hogy az i. munkatárs vitte föl a kiválasztott adatot.

$$P(M_1) = \frac{310}{310 + 230 + 250 + 210} = 0{,}31$$

$$P(M_2) = 0{,}23$$

$$P(M_3) = 0{,}25$$

$$P(M_4) = 0{,}21$$

$$P(H|M_1) = 0{,}01$$

$$P(H|M_2) = 0{,}03$$

$$P(H|M_3) = 0{,}02$$

$$P(H|M_4) = 0{,}04$$

H alatt az M_1, M_2, M_3, M_4 események teljes eseményrendszert alkotnak, mivel egymást kizáróak (ha egyet húzunk, az csak egyiküktől származhat), valamint $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ lefedi az összes lehetséges esetet (máshonnan a hiba nem származhatott). Mivel H is ezen az eseménytéren értelmezhető, így a teljes valószínűség tételét alkalmazva

$$P(H) = P(H|M_1)P(M_1) + P(H|M_2)P(M_2) + P(H|M_3)P(M_3) + P(H|M_4)P(M_4)$$

b) hibátlan

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H)$$

c) a 4. kollégától van az adat, ha hibásat húztunk

$$P(M_4|H) = ?$$

A megadott adatok között ilyen felállásban nincs információnk, csak H-ra vonatkozóan az egyes munkatársakhoz képest, tehát valahogy meg kellene fordítani a kifejezés tagjait. Erre alkalmazhatjuk a Bayes-tételt:

$$P(M_4|H) = \frac{P(H|M_4)P(M_4)}{P(H)}$$

4. Példa

Egy multicég munkatársainak nemek és diplomások szerinti megoszlását a következő táblázatból olvashatjuk ki. Vizsgáljuk meg, hogy független-e a nem és az iskolai végzettség egymástól!

	Nő	Férfi	Összesen
Diplomás	200	300	500
Nem diplomás	300	200	500

Összesen	500	500	1000

Megoldás:

Kétféleképp vizsgálhatjuk:

a) A kérdés tehát az, hogy $P(DN) = P(D)P(N)$ fönnáll-e, ahol D az az esemény, hogy egy véletlenül húzott ember diplomás, N pedig az, hogy egy véletlenül húzott ember nő.

$$P(DN) = \frac{200}{1000}$$

$$P(D) = 0{,}5$$

$$P(N) = 0{,}5$$

$0{,}2 \neq 0{,}5 \times 0{,}5$, tehát nem függetlenek az események.

b) A kérdés az, hogy $P(N|D) = P(N)$ fennáll-e.

$$P(N|D) = \frac{P(ND)}{P(D)} = \frac{200}{500} \neq \frac{500}{1000}$$

ZH és vizsga feladatok

5. Példa

Egy kosárban 3 piros és 2 lila hímes tojás van. Véletlenszerűen kihúzunk egyet, majd a húzott színű tojásból plusz egyet belerakunk, valamint a húzott tojást is visszatesszük. Ezt megismételjük 4-szer. Ezt követően egyet húzva mekkora valószínűséggel kapunk piros tojást?

Megoldás:

Jelöljék az A események, hogy valamilyen módon megtörtént a 4 húzás, B pedig azt, hogy az ötödik piros. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy B-nek mi a valószínűsége. B függ a különböző A eseményektől, így a B valószínűségét az A-ra vonatkozó teljes valószínűsége adja. Kellenek tehát először az A események. A 4 húzás lehetséges kimenetei:

$A_1 = pppp, A_2 = pplp, A_3 = plpp, A_4 = lppp, A_5 = pllp, A_6 = lplp, A_7 = llpp, A_8 = lllp, A_9 = llll, A_{10} = llpl, A_{11} = lpll, A_{12} = plll, A_{13} = lppl, A_{14} = plpl, A_{15} = ppll, A_{16} = pppl$

$$P(A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{8}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{8}$$

$$P(A_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} = P(A_1) = P(A_4) = P(A_{16}) = P(A_2)$$

$$P(A_5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{8} = P(A_6) = P(A_7) = P(A_{13}) = P(A_{14}) = P(A_{15})$$

$$P(A_8) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = P(A_{10}) = P(A_{11}) = P(A_{12})$$

$$P(A_9) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{8}$$

Fent nem ugyanúgy számoljuk pl. $P(A_3)$-at és $P(A_4)$-et; az egyenlőség itt csak azt jelöli, hogy a különböző szorzatok eredménye épp ugyanaz (mivel szorzatok esetén számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk, így a nevezőkben mindig ugyanaz lesz, a számlálóban pedig ugyanazon számok szorzata, csak a sorrendjük más, de a szorzatuk ugyanaz marad).

Jelölje B az eseményt, hogy az ötödik húzás piros. Teljes valószínűség tételéből következik:

$$P(B) = \sum_{1}^{16} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

$$P(B|A_1) = \frac{7}{9}$$

$$P(B|A_2) = \frac{6}{9}$$

…

6. Példa

Legyenek A és B események, melyekre $P(AB) = \frac{2}{5}$, $P(A|B) = \frac{4}{5}$, $P(B|A) = \frac{2}{3}$. Mekkora a valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik?

Megoldás:

A kérdés $P(A + B) =?$.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - \frac{2}{5}$$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{5}{4}P(AB) = \frac{10}{20}$

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow P(A) = \frac{3}{2}P(AB) = \frac{6}{10}$

$$P(A + B) = \frac{6}{10} + \frac{10}{20} - \frac{2}{5}$$

7. Példa

Legyenek A, B és C teljesen független események, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{6}$. Mennyi $P(\bar{B} + C|A)$?

Megoldás:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$P(\bar{B}+C|A)=P(\bar{B}+C)=P(\bar{B})+P(C)-P(\bar{B}C)=1-P(B)+P(C)-P(\bar{B})P(C)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}$$

8. Példa

Egy betegség kimutatásához szűrővizsgálatot végeznek. A vizsgálat a betegségeket az esetek 90%-ában képes kimutatni. Ugyanakkor megesik, hogy tévesen betegnek diagnosztizál olyat is, aki egészséges. Ennek valószínűsége 3%. A betegség a lakosság 35%-át érinti. Egy lakosról a teszt elvégzése során kiderül, hogy egészséges. Mennyi a valószínűsége, hogy valóban az?

Megoldás:

B: páciens beteg

K: teszt kimutatja, hogy beteg

$$P(\bar{B}|\bar{K})=?$$

B-ről K függvényében nincsen információnk, csak a másik irányba ismerünk valószínűségeket:

$P(K|B)=0{,}9$, $P(K|\bar{B})=0{,}03$, $P(B)=0{,}35$

Tehát meg kellene fordítani a kérdésben a tagokat, amire Bayes tételét alkalmazzuk:

$$P(\bar{B}|\bar{K})=\frac{P(\bar{K}|\bar{B})P(\bar{B})}{P(\bar{K})}$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=0{,}65$$

$\bar{K}$ fölírható a teljes valószínűség alapján:

$$P(\bar{K})=P(\bar{K}|B)P(B)+P(\bar{K}|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$P(\bar{K}|B)=1-P(K|B)$$

$$P(\bar{K}|\bar{B})=1-P(K|\bar{B})$$

9. Példa

Egy király esélyt ad egy elítéltnek a megmenekülésre. Ehhez az elítéltnek bekötött szemmel három urnából kell egy-egy golyót húznia, majd egy negyedik urnába tenni azokat. A negyedik urnából újból kell húznia – amennyiben ez fehér, megmenekül. Mekkora a megmenekülés valószínűsége, ha az urnákban az alábbiak szerint vannak a golyók elosztva?

	fehér	piros	fekete
1. urna	2	5	3
2. urna	5	2	3
3. urna	3	3	4

Megoldás:

A negyedik urnából kihúzott golyó 3 helyről jöhetett, jelölje $U_i, i = 1,2,3$ rendre hogy az *i*. urnából származik a golyó, amit húzott. Jelölje F hogy a 4. urnából fehéret húzott.

Ekkor a kérdés az, hogy $P(F) = ?$

Mivel csak az egyik urnából származhatott, így U_1, U_2, U_3 teljes eseményrendszert alkot F alatt. Így tehát

$$P(F) = P(F|U_1)P(U_1) + P(F|U_2)P(U_2) + P(F|U_3)P(U_3)$$

Egyértelmű, hogy $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$

$$P(F|U_1) = \frac{2}{2+5+3} = 0{,}2$$

$$P(F|U_2) = 0{,}5$$

$$P(F|U_3) = 0{,}3$$

10. Példa

Legyenek A és B események, melyekre $P(AB) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{3}{4}$. Mi a valószínűsége, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be?

Megoldás:

Az, hogy pontosan egy következik be $P\left((A\bar{B}) + (\bar{A}B)\right) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) - P(A\bar{A}B\bar{B}) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$.

Számoljuk ki P(A)-t, mivel erre elég valószínű, hogy szükség lesz.

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{P(A)} = \frac{3}{4} \rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$

Kellene valahogy $P(A\bar{B})$ és $P(\bar{A}B)$. $\bar{B}$-as tagot aránylag könnyen tudunk keríteni, hiszen

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{1}{4}$$

$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A\bar{B})}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \rightarrow P(A\bar{B}) = \frac{1}{12}$

Kellene még egy A negáltas tag, azonban ehhez A-nak kellene a feltétel bal oldalán lennie – ezt elérhetjük Bayes tételével:

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \rightarrow P(A|B) = 0{,}5$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0{,}5$$

$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{\frac{1}{2}} = 0{,}5 \rightarrow P(\bar{A}B) = 0{,}25$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Tehát

$$P\big((A\bar{B})+(\bar{A}B)\big)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

11. Példa

Az I. dobozban két piros és két fehér, a II. dobozban két piros és egy fehér golyó van. Feldobnak két kockát. Ha a dobás eredménye 3-mal osztható, akkor a II. dobozból, különben az első dobozból húznak ki két golyót visszatevés nélkül. Ha tudjuk, hogy mindkét kivett golyó piros, akkor melyik dobozból húzásnak nagyobb a valószínűsége?

Megoldás:

A_1 és A_2 jelentse rendre, hogy az első vagy a második dobozból húztunk.

Az első dobozból akkor húzunk, ha a két kockával 3-mal osztható eredményt kapunk, azaz összegük lehet 3, 6, 9 vagy 12.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A_2)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}, P(A_1)=P(\overline{A_2})=1-\frac{12}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

Jelölje K hogy két pirosat húzunk.

$$P(K|A_1)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$P(K|A_2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

A kérdés $P(A_1|K)$ és $P(A_2|K)$.

Hogy megfordítsuk őket használjuk Bayes tételét:

$$P(A_1|K)=\frac{P(K|A_1)P(A_1)}{P(K)}$$

Ehhez még kell P(K). K alatt A_1 és A_2 teljes eseményrendszert alkot, így a teljes valószínűség tétele alkalmazható:

$$P(K) = P(K|A_1)P(A_1) + P(K|A_2)P(A_2) = \frac{2}{9}$$

$$P(A_1|K) = 0{,}5$$

$$P(A_2|K) = \frac{P(K|A_2)P(A_2)}{P(K)} = 0{,}5$$

12. Példa

Egy ládában 10 darab kocka van, melyek közül 9 szabályos, eggyel pedig csak hatost lehet dobni. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és 3-szor földobva mindig 6-ost kapunk mekkora a valószínűsége, hogy a hamis kockát vettük ki?

Megoldás:

Jelölje S_3 azt, hogy a dobott hatosok száma 3. Jelölje A, hogy szabályos kockát veszünk ki.

P(A)=0,9

$$P(S_3|A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(S_3|\bar{A}) = 1$$

A kérdés $P(\bar{A}|S_3)$. A kifejezésben a tagokat föl kellene cserélni, így Bayes tételét alkalmazzuk:

$$P(\bar{A}|S_3) = \frac{P(S_3|\bar{A})P(\bar{A})}{P(S_3)}$$

$$P(S_3) = P(S_3|A)P(A) + P(S_3|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{5}{48}$$

$$P(\bar{A}|S_3) = 0{,}96$$

13. Példa

Három kockával dobunk. Legyen X a dobott összeg, Y a dobott hatosok száma. Mennyi P(X < 3Y)?

Megoldás:

$$P(X < 3Y) = P(X < 3Y|Y = 0)P(Y = 0) + P(X < 3Y|Y = 1)P(Y = 1) \\ + P(X < 3Y|Y = 2)P(Y = 2) + P(X < 3Y|Y = 3)P(Y = 3)$$

A különböző $P(Y = i), i = 0,1,2,3$ értékeket ki tudnánk számolni, de fölösleges, mivel minden szorzat bal tagja 0. $P(X < 3Y|Y = 0)$ azt jelenti, hogy mi a valószínűsége, hogy a dobott összeg kisebb, mint 3*0 – nyilván ez nulla. $P(X < 3Y|Y = 1)$ azt jelenti, hogy mi a valószínűsége hogy a dobott összeg kisebb mint 3, ha az egyik kockával 6-ost dobtunk – nyilván legalább 8-nak kéne így az összegnek lennie, tehát megint csak 0 a valószínűség. Hasonlóan érvelhetünk tovább.

14. Példa

Valaki feldob egy kockát; ha az eredmény k, akkor k piros és 7-k fehér golyót betesz egy urnába. A dobás eredményét előttünk titokban tartja. Ezután 10-szer húz visszatevéssel az urnából, a kihúzott golyó színét pedig mindig megmondja. Ennek alapján kell eltalálni azt, hogy a kockával hanyast dobott. Hogyan tippeljünk? Mekkora esélyünk van a találatra?

Megoldás:

Nyilván arra kell tippelnünk, aminek a legnagyobb a valószínűsége. A kockával dobást jelöljük A-val, tehát a kérdés $\arg\max_k P(A=k)$, azaz keressük azt a k-t, amire $P(A=k)$ a legnagyobb.

k értékkészlete $k \in [1,2,3,4,5,6]$.

Az urnában mindig 7 golyó van, ebből húz visszatevéssel, 10-szer. Jelölje B a kihúzott pirosak számát. Írjuk föl amit tudunk:

$$P(B=i|A=k)=\binom{10}{i}\left(\frac{k}{7}\right)^i\left(1-\frac{k}{7}\right)^{10-i}$$

$$P(A=k)=\frac{1}{6}$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy $\arg\max_k P(A=k|B=i)$, azaz milyen k mellett a legvalószínűbb megfigyelnünk B=i-t. Csak fordítva ismerünk kapcsolatot köztük, tehát Bayes tételét alkalmazva

$$P(A=k|B=i)=\frac{P(B=i|A=k)P(A=k)}{P(B=i)}=\frac{\frac{1}{6}P(B=i,|A=k)}{P(B=i)}$$

$$P(B=i)=\sum_{k=1}^{6}P(B=i|A=k)P(A=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}P(B=i|A=k)$$

$$P(A=k|B=i)=\frac{P(B=i|\,A=k)}{\sum_{k=1}^{6}P(B=i|A=k)}=\frac{\binom{10}{i}\left(\frac{k}{7}\right)^i\left(1-\frac{k}{7}\right)^{10-i}}{\sum_{k=1}^{6}\binom{10}{i}\left(\frac{k}{7}\right)^i\left(1-\frac{k}{7}\right)^{10-i}}=\frac{\left(\frac{k}{7}\right)^i\left(1-\frac{k}{7}\right)^{10-i}}{\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{7}\right)^i\left(1-\frac{k}{7}\right)^{10-i}}$$

Innen ki kellene számolni minden k-ra: ezek adnák a döntésünkhöz szükséges valószínűségeket, valamint ezek alapján választhatnánk k-t, ami ezt maximalizálja.

15. Példa

Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy érmét annyiszor ahányat a kocka mutat.

a) Mi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
b) Feltéve, hogy egyszer sem dobtunk fejet, mi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?

Megoldás:

a)

X: kockával dobott szám

Y: dobott fejek száma

$P(Y=0)$ a kérdés.

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

$$P(Y=0)=\sum_{i=1}^{6}P(Y=0|X=i)\,P(X=i)$$

$$P(X=i)=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=0|X=i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

Ezeket kiszámolva és behelyettesítve végül azt kapjuk, hogy $P(Y=0)=\frac{21}{128}$

b)

Kérdés: $P(X=6|Y=0)$

$$P(X=6|Y=0)=\frac{P(Y=0|X=6)P(X=6)}{P(Y=0)}=\frac{1}{63}$$

16. Példa

Mennyi $P(A|\bar{B})$, ha $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}5$ és $P(A+B)=0{,}8$?

Megoldás:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ➔$0{,}8=0{,}6+0{,}5-P(AB)$➔$P(AB)=0{,}3$

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0{,}6-0{,}3}{0{,}5}=\frac{3}{5}$$

17. Példa

Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros, ha összegük legalább 10!

Megoldás:

Legalább 10 az alábbi módon jöhet ki:

4+6, 5+5, 5+6, 6+4, 6+5, 6+6

Ebből 3 felel meg nekünk, tehát $P=\frac{3}{6}$. Fancybben fölírva:

A: mindkét dobás páros

$$P(A)=\frac{3\times 3}{6^2}=\frac{1}{4}$$

B: az összeg >= 10

$$P(B)=\frac{1}{6}$$

$P(AB)=\frac{3}{36}$ (a dobások eredménye vagy 4+6, 6+4, 6+6)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

18. Példa

Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Az első játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét kiveszünk 3 labdát. Mennyi a valószínűsége, hogy az utóbb kivett labdák még használatlanok?

Megoldás:

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

A_i: az első játékhoz i db. használatlan labdát vettünk ki

B: a második játékhoz 3 db. használatlan labdát vettünk ki

A_i események teljes eseményrendszert alkotnak, tehát

$$P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(B|A_i)P(A_i)$$

$$P(A_i) = \frac{\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}}$$

$$P(B|A_i) = \frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}}$$

19. Példa

Az A és B események közül valamelyik mindig bekövetkezik. Ha $P(A|B) = 0{,}2$ és $P(B|A) = 0{,}5$ akkor mennyi P(A) és P(B)?

Megoldás:

$$P(A+B) = 1$$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow 0{,}2 = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow 0{,}5 = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1$$

Összekapcsolva a 2. és 3. egyenletet a 4-kel:

$2P(AB) + 5P(AB) - P(AB) = 1 \rightarrow P(AB) = \frac{1}{6}$

Ezt visszakapcsolva beléjük:

$P(A) = \frac{2}{6}, P(B) = \frac{5}{6}$

20. Példa

Három kockát földobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy valamelyiken van 6-os, ha mindegyik kockán más szám van?

Megoldás:

A: egyik kockán 6 van

B: mindhárom kockán más van

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

A és B együtt azt jelenti, hogy az egyik kockán 1 féle érték lehet, a másikon 5 féle, a harmadikon 4 féle; a 6-os pedig 3 különböző kockán lehetett, így

$$P(AB) = \frac{\binom{3}{1} \times 5 \times 4}{6^3}$$

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3}$$

$$P(A|B) = 0{,}5$$

21. Példa

Feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, egyszer, ha írás, kétszer dobunk egy szabályos kockával. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos?

Megoldás:

A: fejet dobunk

B: van 6-os

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

$$P(B|A) = \frac{1}{6}$$

Ha írást dobtunk, akkor kétszer dobunk a kockával – akkor teljesül így B, ha vagy csak az első, vagy csak a második, vagy mindkét dobás hatos: ez összesen $1 \times 5 + 5 \times 1 + 1 = 11$ eset a 36-ból, tehát

$$P(B|\bar{A}) = \frac{11}{36}$$

$$P(B) = \frac{17}{72}$$