Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Geometriai valószínűség

Szűk elméleti áttekintő

Klasszikus valószínűség:

$$P = \frac{jó\ esetek}{összes\ eset}$$

Geometriai valószínűség:

- 1 dimenzióban:

$$P = \frac{jó\ szakaszok}{teljes\ szakasz}$$

- 2 dimenzióban:

$$P = \frac{jó\ területek}{összes\ terület}$$

- 2+ dimenzióban:

$$P = \frac{jó\ térfogatok}{összes\ térfogat}$$

Feladatok

Bevezető feladatok

1. Példa

Egy helikopter egy 20 000 km^2 területű erdős, sziklás hegyvidéken géphiba miatt kényszerleszállást hajtott végre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kutatógépek egy konkrét 5x10 km^2-es völgyben találnak rá?

Megoldás:

$$P = \frac{5 \times 10}{20000}$$

2. Példa

Egy raktárhoz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontokban két kamion érkezik. Az előbb érkező kamion rögtön megkezdi a rakodást. A rakodás az egyik kamionnál 1, a másiknál 2 órát vesz igénybe.

Ha a második kamion akkor érkezik, amikor az elsőre még rakodnak, akkor várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mekkora a valószínűsége, hogy a két kamion közül valamelyiknek várakoznia kell?

Megoldás:

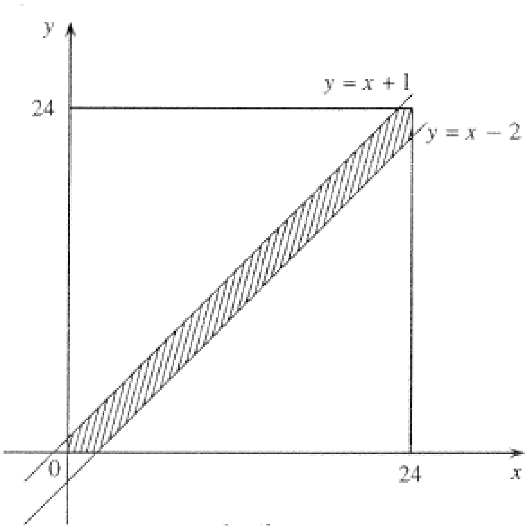
Jelölje x a 24 órás időtartam kezdetétől az egy órás rakodási idejű kamion érkezéséig eltelt időt, y pedig a 24 órás időtartam kezdetétől a két órás rakodási idejű kamion érkezéséig eltelt időt. Ekkor x és y ábrázolható egy koordináta rendszerben, ahol egy 24x24-es négyzetet adnak, ez lesz az eseménytér. A két kamion érkezése tkp. egy (x,y) pontpár a koordinátarendszerben.

Két eset lehetséges azzal kapcsolatban, hogy melyik kamion érkezik előbb:

a) ha $x < y$, akkor y kamion akkor várakozik, ha $y < x + 1$ ➔ $y < x + 1$, azaz az $y = x + 1$ egyenestől lefelé eső térrész területe reprezentálja

b) ha $x > y$, akkor x kamion akkor várakozik, ha $x < y + 2$ ➔ $y > x - 2$, azaz az $y = x – 2$ egyenestől fölfelé eső térrész területe reprezentálja

A fenti két térrész metszete reprezentálja azt, hogy valamelyik kamion várakozik. Ábrán szemléltetve:



Az alsó háromszög területe $\frac{(24-2)^2}{2}$, a felsőé pedig $\frac{(24-1)^2}{2}$. Ezek összegét kivonva az egységnégyzet 24^2 területéből megkapjuk a keresett területet, azaz a valószínűség

$$P = \frac{24^2 - \left(\frac{22^2}{2} + \frac{23^2}{2}\right)}{24^2}$$

ZH és vizsga feladatok

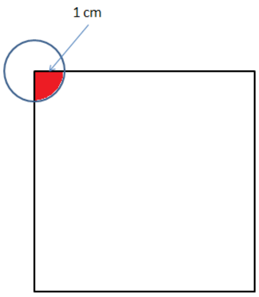
3. Példa

Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk 10 db. 2 cm átmérőjű pénzérmét. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 darab valamelyik négyzet csúcsát fogja lefedni?

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Megoldás:

Az egyes pénzérmék elejtése egymástól független, így azt kell meghatározni, mi annak a valószínűsége, hogy egy pénzérme egy négyzet valamelyik csúcsát lefedi. Ahhoz, hogy az érme egy csúcsot lefedhessen a középpontja a csúcstól legföljebb 1 cm távolságra kerülhet. Az alábbi ábrán pirossal van feltüntetve ez a terület.



Ez a terület $\frac{1^2 \times \pi}{4}$. Mivel azonban négy sarka van a négyzetnek, így ezt 4-gyel megszorozva π lesz a megfelelő terület. A valószínűsége annak, hogy egy érme egy négyzet valamelyik csúcsát fedje egy négyzetnek $p = \frac{\pi}{20^2}$.

Jelölje X_i, hogy hány érme fed csúcsot. Annak a valószínűsége, hogy legalább 5 darab érme fed csúcsot tehát

$P = P\left(\sum_{i=5}^{10} X_i\right) = \sum_{i=5}^{10} P(X_i)$ az események függetlensége miatt.

Annak a valószínűsége, hogy *i* db érme esett csúcsra, 10 – *i* pedig nem esett a csúcsra $p^i \times (1-p)^{10-i}$, valamint 10 érméből *i* $\binom{10}{i}$ módon választható ki, így tehát

$$P(X_i) = \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i}$$

(Most még nem ismerjük a binomiális eloszlást, de ez gyakorlatilag azzal megadható, arra lehet hivatkozni *p* kiszámítása után).

4. Példa

Véletlenszerűen kiválasztunk egymástól függetlenül két számot a [0,1] intervallumból. Jelölje őket X és Y. Mekkora $P\left(|X-Y| < \frac{1}{2}\right)$ és $P\left(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}\right)$?

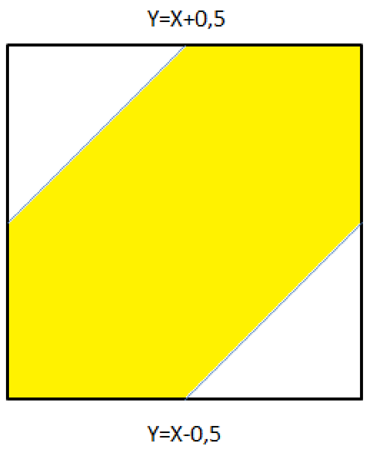
Megoldás:

a) tfh. X > Y, ekkor $|\mathrm{X}-\mathrm{Y}| < \frac{1}{2}$ akkor áll fönn, ha $\mathrm{X}-\mathrm{Y} < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Y} > \mathrm{X} - \frac{1}{2}$

tfh. X < Y, ekkor $|\mathrm{X}-\mathrm{Y}| < \frac{1}{2}$ akkor áll fönn, ha $\mathrm{X}-\mathrm{Y} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Y} < \frac{1}{2} + \mathrm{X}$

A valószínűség az $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \frac{1}{2}$ alatti és $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \frac{1}{2}$ fölötti terület metszetével reprezentálható, lásd az ábrán sárga területtel jelölve:

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

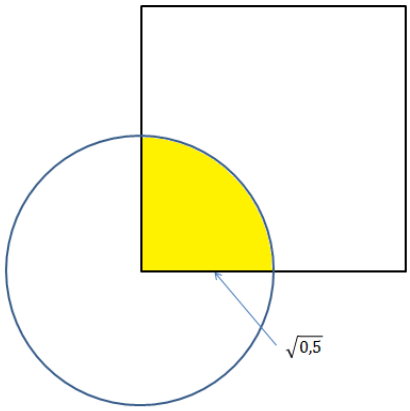


$$T = 1 - \left(\frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^2}{2}\right) = 1 - 0{,}5^2 = 0{,}75$$

Végül

$$P\left(|X - Y| < \frac{1}{2}\right) = \frac{0{,}75}{1^2}$$

b) Vegyük észre, hogy $X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}$ a (0,0) középpontú, $\sqrt{0{,}5}$ sugarú kör belseje; ábrázolva, a területet sárgával jelölve:



Ebből a terület könnyen kiszámítható:

$$T = \frac{\sqrt{0{,}5}^2 \times \pi}{4}$$

Tehát:

$$P(X^2 + Y^2 < 0{,}5) = \frac{T}{1^2} = T$$

5. Példa

Tekintsük a [0,10] intervallumot, melyet 3 részre osztunk: [0,3], [3,5] és [5,10]. Ha egymástól függetlenül véletlenszerűen kiválasztunk 3 pontot, mekkora valószínűséggel esik mindhárom pont különböző részbe?

Megoldás:

Jelölje p_1, p_2, p_3 rendre az egyes intervallumokból való választás valószínűségét. Ekkor $p_1 = 0{,}3, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}5$. Három pont $\frac{3!}{1!\times 1!\times 1!}$ permutációban fordulhat elő, egy-egy permutáció bekövetkezésének a valószínűsége pedig $p_1 \times p_2 \times p_3$, így a végleges megoldás

$$3! \times 0{,}3 \times 0{,}2 \times 0{,}5$$

(Egyébként ez polinomiális eloszlással ugyanígy fölírható.)

6. Példa

Egy 10x10-es négyzetrácsos padlózatra véletlenül leejtünk 5db 3-as átmérőjű pénzérmét, amik szétgurulnak, majd megállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol?

Megoldás:

Egy pénzérme középpontja a 10x10-es négyzetrács széleitől egy sugárnyira, azaz 1,5 távolságra kell legalább legyen. Ez azt jelenti, hogy egy 7x7-es négyzeten belülre kell esnie, aminek a valószínűsége $\frac{7^2}{10^2} = 0{,}49$. A 3. Példánál le lett vezetve, hogy a binomiális eloszlás ismerete híján hogyan lehet innentől számolni.

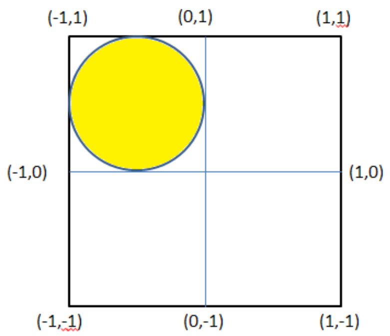
$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} 0{,}49^i (1 - 0{,}49)^{5-i}$$

7. Példa[1]

A [-1,1]x[-1,1] négyzeten egymás után sorsolunk ki 20 pontot. Jelölje X azoknak a pontoknak a számát, amik az $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ kör belsejébe esnek. Mekkora a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 17 pont esik a körbe?

Megoldás:

Az egyenlet a (-0,5, 0,5) középpontú, 0,5 sugarú kör egyenlete. Az egységnégyzetben az egyenlet által kijelölt terület az ábrán sárgával jelölt:



1 ZH feladat nyomán, módosítva.

Ebből könnyen látszik, hogy $T = 0{,}5^2 \times \pi$, tehát annak a valószínűsége, hogy egy pontot a körből választunk $p = \frac{T}{2^2}$.

A kérdés, hogy $P(X < 17) = 1 - P(X \geq 17) = 1 - \sum_{i=17}^{20} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i}$.

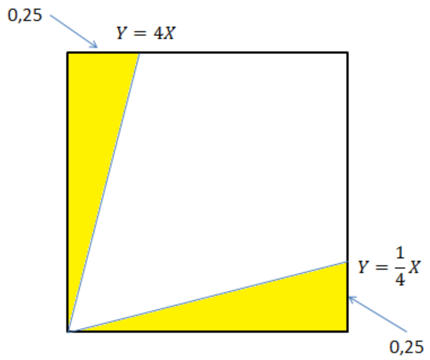
8. Példa

A [0,1] intervallumon kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több mint négyszerese a másiknak?

Megoldás:

Ha X < Y, akkor $Y > 4X$ jó térrész, azaz az $Y = 4X$ egyenes fölötti terület.

Ha X > Y, akkor az $Y < \frac{1}{4}X$ a jó térrész, azaz az $Y = \frac{1}{4}X$ alatti terület.



$$P = \frac{\frac{0{,}25 \times 1}{2} + \frac{0{,}25 \times 1}{2}}{1^2} = 0{,}25$$

9. Példa

Az egységnégyzeten egymástól függetlenül kiválasztunk 8 pontot. Ezek közül kiválasztjuk azt, amelyik legközelebb esik az origóhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a legrövidebb távolság 0,5-nél kisebb?

Megoldás:

Annak a valószínűsége, hogy egy pont legföljebb 0,5 távolságra essen az origótól $p = \frac{0{,}5^2\pi}{4}$. Annak a valószínűsége, hogy egy pont sem esik távolságon belülre $(1-p)^8$. Ennek az ellentett eseménye, hogy lesz legalább egy olyan pont, amelyik belülre esik, tehát a 8 közül a legkisebb távolságú belül kell legyen: $P = 1 - (1-p)^8$.

10. Példa

A (0,2) és (0,3) szakaszokon választunk találomra 1-1 pontot, legyenek ezek x és y. Mennyi a valószínűsége, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

Megoldás:

Akkor szerkeszthető háromszög, ha mindhárom oldalánál hosszabb a másik kettő összege, azaz ha

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

- $x + y > 1$➔$y > 1 - x$➔$y = 1 - x$ fölötti terület

- $x + 1 > y$➔$y = x + 1$ egyenes alatti terület

- $y + 1 > x$ ➔$y > x - 1$➔$y = x - 1$ egyenes feletti terület

A lenti ábráról leolvashatjuk, hogy a keresett terület:

$$T = 3 \times 2 - \left(\frac{2 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2}\right) = 3$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P = \frac{T}{3 \times 2} = 0{,}5$$