Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Eseményalgebra és kombinatorika feladatok, megoldások

Szűk elméleti áttekintő

Kombinatorika quick-guide:

- n db. elemből n db. sorrendjeire vagyunk kíváncsiak: permutáció

- n db. elemből m < n db. hányféleképp rakható sorba, ha a sorrend számít: variáció

- n db. elemből m < n db. hányféleképp választható ki, ha a sorrend nem számít: kombináció

Permutáció

Ismétlés nélküli:

$$n!$$

Ismétléses:

$$\frac{n!}{k_1! \times k_2! \dots k_j!}$$

Variáció

Ismétlés nélküli:

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

Ismétléses:

$$n^m$$

Kombináció

Ismétlés nélküli:

$$\binom{n}{m}$$

Ismétléses:

$$\binom{n+m-1}{m}$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Eseményalgebra

- Poincare-tétel

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \sum_{1\leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots j_i \leq n} P\left(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_i}\right)$$

- Boole-egyenlőtlenség:

a) $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

b) $P(\prod_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$

- független események esetén $P(AB) = P(A)P(B)$

- egymást kizáró események esetén $P(AB) = 0$

Feladatok

Bevezető feladatok

1. Példa

Egy adóhivatal egy munkatársa egy napon általában három vállalkozó adóbevallását tudja ellenőrizni. Jelentse $A_i, i \in \{1,2,3\}$ azt az eseményt, hogy az *i*-edik bevallást hibátlannak találja. Fogalmazzuk meg szavakkal, hogy mit jelentenek az alábbi események:

a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Bool algebrai jelöléssel ez $A_1 + A_2 + A_3$, azaz $A_1\ VAGY\ A_2\ VAGY\ A_3$, ha ez valakinek segít. Tehát legalább egy adóbevallást hibátlannak talál.

b) $(A_2 \cup A_3) \cap \overline{A_1}$

Átírva ez $(A_2\ VAGY\ A_3)$ ÉS $\overline{A_1}$, azaz a 2. és 3. bevallás közül legalább az egyiket hibátlannak találja, de az elsőt hibásnak.

c) $\overline{A_1 \cup \overline{A_2 \cap A_3}} \backslash A_1$

Átírva $\overline{A_1 \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}} \backslash A_1 = (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \backslash A_1$

Mivel $X \backslash Y = X \cap \overline{Y}$ tovább írhatjuk:

$\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_1} = \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$, azaz az 1. bevallást hibásnak, a másik kettőt helyesnek találta.

2. Példa

Az előző feladatból kiindulva most a szavakkal megfogalmazott kifejezéseket írjuk föl az eseményalgebra segítségével!

a) Legfeljebb egy bevallás hibás.

Az, hogy legfeljebb egy bevallás lehet hibás azt jelenti, hogy vagy mindegyik helyes, vagy a három közül csak az egyik.

Mindhárom bevallás hibátlan: $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3$.

Csak az egyik bevallás hibás: $(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \mathrm{A}_3) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \overline{\mathrm{A}_3})$.

Összekapcsolva: $(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) \cup \left((\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \mathrm{A}_3) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \overline{\mathrm{A}_3})\right)$

b) Legalább egy bevallás hibás.

Az, hogy legalább egy bevallás hibás azt jelenti, hogy nem találja mindegyiket hibátlannak:

$\overline{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3}$.

c) Legalább két bevallás hibás.

Ez azt jelenti, hogy vagy 2, vagy 3 bevallás hibás.

3 bevallás hibás: $\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \overline{\mathrm{A}_3}$.

2 bevallás hibás: $(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \mathrm{A}_3) \cup (\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2 \cap \overline{\mathrm{A}_3}) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \overline{\mathrm{A}_3})$.

Összekapcsolva: $(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \overline{\mathrm{A}_3}) \cup (\overline{\mathrm{A}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \mathrm{A}_3) \cup (\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2 \cap \overline{\mathrm{A}_3}) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \overline{\mathrm{A}_2} \cap \overline{\mathrm{A}_3})$.

3. Példa

Egy titkárnő elfelejtette felírni a cég egyik partnerének telefonszámát. Csak a számjegyekre emlékszik, ezek: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, és arra, hogy minden számjegy egyszer fordult elő.

a) Hányféle telefonszámot tud felírni ebből?

Mivel minden szám egyszer fordult elő, így ismétlés nélküli permutációról van szó. Az első számjegy lehet 7 féle, a második már csak 6, a harmadik 5, stb.

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$$

b) Hányféle telefonszámot tud felírni, ha arra emlékszik, hogy 3-mal kezdődött?

Minden szám egyszer fordulhat elő, ráadásul az első csak 3 lehet. Így az első számjegy lehet 1 féle, a második 6 féle, a harmadik 5 féle, stb.

$$1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1 \times 6! = 720$$

c) Hányat tud felírni akkor, ha az utolsó helyen 2, 4, 6 vagy 8 állhat?

Ha az utolsó helyen csak pl. 2 lehet, akkor az utolsó számjegy 1 féle lehet. Az első számjegy így lehet 6 féle, a második 5 féle, stb. Ez összesen $6! = 720$ lehetőség. Ugyanez írható föl, ha az utolsó számjegy 4, 6, vagy 8. Így tehát a lehetséges számok mennyisége összesen

$$4 \times 6! = 2880$$

d) Hányféle számot tud felírni, ha arra emlékszik, hogy páros és páratlan számok felváltva követték egymást?

Mivel páros számból van 4, páratlanból pedig csak 3, így páros számmal kell kezdeni. Az első számjegy lehet 4 féle a párosak közül, a második pedig 3 féle a páratlanok közül. A harmadik számjegy 3 féle lehet a párosak közül, a negyedik 2 féle a páratlanok közül, stb.

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144$$

4. Példa

Tegyük föl, hogy a titkárnő az alábbi számokra emlékszik: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5.

a) Hányféle telefonszámot tud így fölírni?

Továbbra is a lehetséges permutációk száma a kérdés, azonban most ismétlődő elemek vannak, így ismétléses permutáció képletét használjuk.

$$\frac{n!}{k_1! \times k_2!} = \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

b) Hányféle számot tud fölírni, ha 3-assal kell kezdődnie?

Mivel az első jegy kötött, így csak a maradék 6 jegy permutációi érdekesek. A maradék 6-ból 2-szer szerepel 1-es, így az ismétléses permutáció képletét alkalmazva

$$1 \times \frac{6!}{2!} = 360$$

c) Hányféle telefonszámot tud fölírni, ha arra emlékszik, hogy az utolsó szám páros?

Az utolsó szám akkor páros, ha az vagy 2, vagy 4. Ha feltesszük, hogy 2 az utolsó, akkor az előző feladathoz hasonlóan az első 6 jegy permutációi kérdésesek. Ekkor mind 1-esből, mind 3-asból két darab van, így ismétléses permutációt használva

$$\frac{6!}{2! \times 2!} \times 1 = 180.$$

Ha az utolsó szám 4-es lenne, akkor ugyanígy érvelünk. A végeredmény tehát

$$2 \times \frac{6!}{2! \times 2!} \times 1 = 360$$

5. Példa

Egy urnában 6 golyó van, sorra az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal ellátva. Egymás után kihúzunk 4 golyót anélkül, hogy azokat visszatennénk az urnába.

a) Hányféle sorrendben lehet a 4 golyót kihúzni?

6 elemből 4-et választunk ki úgy, hogy azok sorrendje számít (mivel meg tudjuk különböztetni az egyes golyókat), tehát ismétlés nélküli variációról beszélünk.

$$\frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

A korábbi logika is alkalmazható: az első húzás lehet 6 féle, a második 5, a harmadik 4, a negyedik pedig 3.

b) Hány olyan eset lehetséges, amikor az első húzás 1-es?

Az első húzás így csak egyféle lehet, tehát a fennmaradó 5 számból vagyunk kíváncsiak 3 húzás lehetséges sorrendjére, ahol a sorrend számít, valamint minden szám csak egyszer szerepelhet (hiszen visszatevés nélkül végezzük a kísérletet):

$$1 \times \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

c) Hány olyan eset lehetséges, amikor az utolsó szám páratlan?

Az utolsó szám lehet 1, 3 vagy 5. Tegyük föl, hogy az utolsó szám 1. Ekkor az utolsó szám 1 féle lehet, a maradék 3 húzás pedig a maradék 5 golyó közül kerül ki, valamint csak egyszer szerepelhetnek, azaz

$$\frac{5!}{(5-3)!} \times 1 = 60.$$

A 3 vagy 5 végű számsorok esetén ugyanez a helyzet, tehát összesen

$$3 \times \frac{5!}{(5-3)!} \times 1 = 180$$

6. Példa

Hány rendszámtábla készíthető 25 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha 3 betűből és 3 számból állhat, de csupa 0 számjegy nem szerepelhet?

Megoldás:

Betűk: 3 < 25 betű kell; megkülönböztethetők, sorrend számít; de többször is szerepelhet ➔ismétléses variáció

$$25^3 = 15625$$

Számok: 3 < 25 szám kell; megkülönböztethetők, sorrend számít; többször is szerepelhet egy szám➔ismétléses variáció

$$10^3 = 1000$$

A csupa 0 számsor tilos, így 999 lehetséges variációban fogadjuk el a számokat.

A megoldás tehát: $25^3 \times (10^3 - 1)$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

7. Példa

Egy üzem a felvételre jelentkező 7 férfi és 8 nő közül 5 férfit és 5 nőt szeretne alkalmazni. Hányféleképp teheti ezt meg?

Megoldás:

Férfiak: 5 < 7 kiválasztása; nem megkülönböztethetők, sorrend nem számít; egy adott férfi csak egyszer lehet kiválasztva ➔ismétlés nélküli kombináció

$$\binom{7}{5} = 21$$

Nők: ugyanaz,

$$\binom{8}{5} = 56$$

Összesen: $21 \times 56 = 1176$

8. Példa

Egy boltban 16-féle táblás csoki van. Hányféleképp vásárolhatunk ajándékba 5 csökit, ha bármelyik fajtából akár többet is választhatunk?

Megoldás:

5 < 16 kiválasztása; nem megkülönböztethetők, sorrend nem számít; az egyes elemek akár ismétlődhetnek ➔ismétléses kombináció

$$\binom{15+5-1}{5} = 15504$$

ZH és vizsga feladatok

1. Példa

A 32 lapos magyar kártyacsomagból húzunk 5 kártyát. Mi a valószínűbb? 5 azonos színűt húzni, vagy hogy az 5 lap között 4 azonos figurájú?

Megoldás:

<u>5 azonos színűt húzni:</u>

Húzhatunk csak pirosat, zöldet, makkot vagy tököt. Tfh pirosakat húzunk csak, azaz a 8 pirosból 5-öt kihúzunk. 5 < 8 húzás, sorrend nem számít: kombináció, $\binom{8}{5}$. Mivel ez 4 színből történhet, így $4 \times \binom{8}{5} = 224$.

<u>5 lap közül 4 azonos figurájú:</u>

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

8 fajta figura van. Tfh 5 kártyából 4 ász, azaz a maradék egy szabad kártya 32 – 4 = 28 féle lehet. Mivel 8 figura van, így összesen $8 \times 28 = 224$ lehetséges mód van. A két esemény tehát ugyanolyan valószínű.

2. Példa

Egy urnában 6 piros és 5 kék golyó van. Kihúzunk kettőt, visszatesszük, megkeverjük, majd újra húzunk kettőt. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan az egyik alkalommal volt kék golyó a kihúzottak közt?

Megoldás:

Pontosan egyik alkalommal úgy húzhatunk kéket, ha vagy az első, vagy a második húzásban volt kék.

Tfh. az első húzásban van kék. Annak a valószínűsége, hogy van kék egyenlő azzal, hogy nem csak piros van. Annak a valószínűsége, hogy csak piros van $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy nem csak piros van $1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}$. Ha az első húzásban nem csak piros volt, akkor a másodikban csak piros lehet, ennek a valószínűségét már tudjuk. Azaz annak a valószínűsége, hogy először nem csak pirosat, majd csak pirosat húzunk $\left(1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}\right) \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}$.

Ha csak a második húzásban van kék, az az előző eredmény, csak fordítva szerepelnek a szorzat tagjai, így tehát elég végeredmény ezek összegéből:

$$2 \times \left(1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}\right) \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}$$

3. Példa

Egy dobozban 3 piros és 4 fehér golyó van. Egyszerre kiveszünk 4-et. Tekintsük az alábbi eseményeket:
A: páros számú piros golyó van.
B: több a piros, mint a fehér.
C: van fehér.
Számítsa ki a $P\left((\bar{A} + B)C\right)$ valószínűséget!

Megoldás:

P(C)=1, mivel ha az összes pirosat ki is húzzuk, akkor is húzunk fehéret.

$$P\left((\bar{A} + B)C\right) = P(\bar{A} + B)$$

Poincaré tételt használva $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$.

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Az A esemény ellentettje, hogy páratlan számú piros golyó van a mintában, azaz vagy 1, vagy 3. A B esemény egyetlen esetben fordulhat elő, ha 3 piros és 1 fehéret húzunk. Ez viszont azt jelenti, hogy $B \subseteq \bar{A}$, tehát $P(\bar{A}B) = P(B)$.

Így azt kapjuk eredményül, hogy

$$P\big((\bar{A}+B)C\big) = P(\bar{A})$$

4. Példa

András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül húznak egy-egy golyót egy dobozból, amiben eredetileg 7 fehér és 1 fekete van. Ha az első körben nem húzzák ki a feketét, akkor visszatevés nélkül folytatják. Az veszít, aki kihúzza a feketét. Kinek mekkora erre az esélye?

Megoldás:

Jelölje A, B és C hogy András, Béla vagy Csaba veszít. Legkésőbb a harmadik körben mindenképp eldől, ki veszít.

András veszít, ha az első, a második, vagy a harmadik körben kihúzza a feketét. Ennek a valószínűsége

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{7}{8}\times\frac{1}{7} + \frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{3}{8}$$

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{2}{8}$$

5. Példa

Bizonyítsa be, hogy minden A, B, C esemény esetén $P(AB) + P(AC) \leq P(A) + P(BC)$!

Megoldás:

$$P(AB) = P(ABC) + P(AB\bar{C})$$

$$P(AC) = P(ABC) + P(A\bar{B}C)$$

baloldal: $P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(ABC) + P(A\bar{B}C)$

$$P(BC) = P(ABC) + P(\bar{A}BC)$$

$$P(A) = P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(A\bar{B}\bar{C})$$

jobboldal: $P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(ABC) + P(\bar{A}BC)$

Egyben:

$$P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(ABC) + P(A\bar{B}C) \\ \leq P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(ABC) + P(\bar{A}BC)$$

$$P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) \leq P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}BC)$$

$$0 \leq P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}BC)$$

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

6. Példa

András és Béla két kockával dob. András összeadja, Béla összeszorozza a kapott értékeket. Mennyi a valószínűsége, hogy András kap nagyobb számot?

Megoldás:

András:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Béla:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Kiolvasható, hogy 36 esetből 11 kedvez Andrásnak.

7. Példa

Legyenek A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$. Mennyi $P(\bar{A} + B + C)$?

Megoldás:

$$P(\bar{A} + B + C) = P(\bar{A}) + P(B) + P(C) - P(\bar{A}B) - P(\bar{A}C) - P(BC) + P(\bar{A}BC)$$

Mivel A és B független, így $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \times P(B)$.

Mivel C kizárja A-t és B-t, így $P(BC) = P(\bar{A}BC) = 0$, valamint $P(\bar{A}C) = P(C)$ (hiszen A-nak és C-nek nincs közös metszete, tehát $C \subseteq \bar{A}$, így egy halmaz és annak egy részhalmazának metszete maga a részhalmaz).

$$P(\bar{A} + B + C) = P(\bar{A}) + P(B) + P(C) - P(\bar{A}) \times P(B) - P(C) - 0 + 0$$
$$= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{11}{12}$$

8. Példa

Bizonyítsa be, hogyha $P(A) = 0{,}1$ és $P(B) = 0{,}2$, akkor $P(\bar{A}B) \geq 0{,}1$!

Zlatniczki Ádám
adam.zlatniczki@cs.bme.hu

Megoldás:

El kellene érni, hogy $\geq$ reláció kerüljön az egyenletünkbe. Ezt a Boole-egyenlőtlenség b) alakjából

$$P(\bar{A}B) \geq 1 - \left(P(A) + P(\bar{B})\right) = 1 - 0{,}1 - 0{,}8 = 0{,}1$$