# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH javítókulcs (2025.04.02. 18-20, Q-I)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

**1.** Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert, és az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével döntsük el, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk meg egy megoldást, ha nem, akkor adjunk erre bizonyítékot a Farkas-lemma alkalmazásával. **(11 pont)**

$$\begin{aligned} x+2y-3z &\le -4\\ x-y+6z &\ge 2\\ x+3y &\le 10\\ y-2z &\ge -1 \end{aligned}$$

*Megoldás:* Először is hozzuk sztenderd alakra (minden $\ge$ egyenlőtlenséget $\le$ alakúra írunk át negatív szorzó segítségével): **(1 pont)**

$$\begin{aligned} x+2y-3z &\le -4\\ -x+y-6z &\le -2\\ x+3y &\le 10\\ -y+2z &\le 1 \end{aligned}$$

A következőekben a kibővített együtthatómátrixszal dolgozunk úgy, ahogy az órán tanultuk: sorra elimináljuk a változókat úgy, hogy az adott változót nemnulla együtthatóval tartalmazó sorokat alkalmas nemnegatív számmal szorozva elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója $\pm 1$ legyen, majd az összes, az adott változót $+1$ együtthatóval tartalmazó sort összeadjuk az összes, az adott változót $-1$ együtthatóval tartalmazó sorral, és az eredményül kapott sorokat, valamint az adott változót 0 együtthatóval tartalmazó sorokat írjuk az új mátrixba. Ezt az eljárást folytatjuk, míg az összes változót elimináltuk, vagy tilos sort kapunk (minden együttható 0, de a jobboldal negatív). A mintamegoldásban az $x$, $y$, $z$ sorrendben elimináljuk a változókat. **(4 pont)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -4\\ -1 & 1 & -6 & -2\\ 1 & 3 & 0 & 10\\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 0 & 10\\ -1 & 1 & -6 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & -9 & -6\\ 0 & 4 & -6 & 8\\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2\\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Mivel nem kaptunk tilos sort, a tanultak szerint az egyenlőtlenségrendszer megoldható. **(1 pont)**
(A középső **(4 pont)** arra jár, ha valaki az eljárás lépéseit ismeri és sikerrel alkalmazni is tudja. Az előbbi kiderülhet szövegszerű megfogalmazásból, de annak híján az elvégzett lépésekből is; utóbbi a lépések kivitelezéséből látható. Aki felidézi ugyan a vonatkozó elméletet, de egyáltalán nem demonstrálja, hogy alkalmazni is képes azt a feladatra, az **(0 pont)**-ot kap.)
A tanultak alapján úgy kaphatunk egy megoldást, ha a változók eliminálási sorrendjét megfordítva az adott változónak az eliminálását megelőző utolsó állapotnak megfelelően választunk megengedett értéket, majd ezt rögzítve haladunk tovább a következő változóra.
A hatodik mátrix alapján a feltételeink $z \le 6$ és $-z \le -1$, tehát $1 \le z \le 6$, válasszuk mondjuk a $z = 1$ értéket.
A negyedik mátrix alapján az $y$-t tartalmazó sorok (behelyettesítve $z = 1$-et) $y - 3z = y - 3 \le -2$, azaz $y \le 1$;

$y - \frac{3}{2}z = y - \frac{3}{2} \leq 2$, azaz $y \leq \frac{7}{2}$; valamint $-y + 2z = -y + 2 \leq 1$, azaz $y \geq 1$. Ezeket összevetve $1 \leq y \leq 1$, válasszuk tehát az $y = 1$ értéket. Az $x$-re a második mátrixból kapott feltételek (már behelyettesítve $y = z = 1$-et): $x \leq -3$, $x \leq 7$ és $x \geq -3$, összegezve $-3 \leq x \leq -3$; az $x = -3$ választás tehát megfelelő. Összegezve: $x = -3$, $y = 1$, $z = 1$ például megoldja a rendszert. **(5 pont)**

---

**2.** Az oldalt látható mátrix az $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az $A_iB_j$ él súlya az $A_i$ indexű sor és a $B_j$ indexű oszlop metszetében álló szám. A sorok és oszlopok utolsó elemei a megfelelő csúcshoz rendelt súlyok.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 4 | 7 | 3 | 0 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3$ | 7 | 6 | 8 | 5 | 2 |
| $A_4$ | 5 | 4 | 6 | 4 | 0 |
| | 5 | 3 | 6 | 3 | |

**a)** Mi az a legkisebb $\delta \geq 0$ szám, melyet az $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ csúcsok mindegyikének súlyához hozzáadva (és a $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ csúcsok súlyait változatlanul hagyva) a módosított csúcssúlyok súlyozott lefogást alkotnak? (Akár $\delta = 0$ is lehet.) Indokoljuk is meg, hogy a megadott $\delta$ szám valóban megfelelő, de annál kisebb szám nem. **(4 pont)**

**b)** Az előző kérdésben a módosítás után kapott súlyozott lefogás vajon minimális összsúlyú-e? Ha igen, indokoljuk meg, miért az. Ha nem az, adjunk egy minimális összsúlyú súlyozott lefogást (és indokoljuk is meg a minimalitását). **(8 pont)**

(Ha a feladat egyes részleteihez esetleg nincs ötletünk és elakadnánk, akkor nem árthat egy alkalmas módszerrel meghatározni a páros gráfunk egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.)

*Megoldás:* **a)** A megadott csúcssúlyok nem alkotnak súlyozott lefogást, mivel például az $A_1B_1$ él súlya 6, végpontjainak súlyösszege viszont csak $5 + 0 = 5$, súlyozott lefogás esetén viszont minden él súlya legfeljebb annyi lehet, mint a végpontjai súlyainak összege. **(1 pont)**

Ebből látszik az is, hogy $\delta \geq 1$ szükséges. A $\delta = 1$ választás viszont megfelelő: a mátrix minden eleme legfeljebb akkora lesz, mint a hozzá tartozó sor és oszlop súlyainak összege. Tehát $\delta = 1$ a legkisebb megfelelő választás. A kapott súlyozott lefogás látható alább, balra (pontos élek vastagítva; ez később jön jól). **(3 pont)**

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | **4** | **7** | 3 | 1 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 1 |
| $A_3$ | 7 | **6** | 8 | 5 | 3 |
| $A_4$ | 5 | **4** | 6 | **4** | 1 |
| | 5 | 3 | 6 | 3 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | **4** | **7** | 3 | 1 |
| $A_2$ | **5** | **3** | 5 | **3** | 0 |
| $A_3$ | 7 | **6** | 8 | 5 | 3 |
| $A_4$ | 5 | **4** | 6 | **4** | 1 |
| | 5 | 3 | 6 | 3 | |

**b)** A kapott súlyozott lefogásnál a második sorban nincs pontos él. **(2 pont)**

Ez alapján a második sor súlyát csökkenthetjük eggyel, és még mindig súlyozott lefogást kapunk (jobb oldali táblázat); az eredeti tehát nem volt minimális összsúlyú. **(2 pont)**

A csökkentett viszont az: a pontos éleket vizsgálva könnyen adódik, hogy az $A_1B_3$, $A_2B_1$, $A_3B_2$, $A_4B_4$ teljes párosítás csupa pontos élből áll, tehát a tanultak szerint maximális súlyú, és a súlyozott lefogásunk minimális súlyú. **(4 pont)**

*Más megoldás:* Az is járható (és maximális pontszámot érő) út, ha valaki az Egerváry-algoritmust követve prezentálja a megadott páros gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását (és egyúttal egy ugyanekkora súlyú teljes párosítását), kiszámítja annak összsúlyát (22 lesz), összeveti az *a)* részben adott súlyozott lefogás összsúlyával, és megállapítja, hogy az előbbi bizony kisebb, tehát az utóbbi nem minimális. **(8 pont)**

Részletek:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 4 | 7 | 3 | 0 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3$ | $\boxed{7}$ | **6** | **8** | **5** | 0 |
| $A_4$ | 5 | 4 | 6 | 4 | 0 |
| | 7 | 6 | 8 | 5 | |

| | $B_1^*$ | $B_2^*$ | $B_3^*$ | $B_4^*$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | 4 | **7** | 3 | 0 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3^*$ | $\boxed{7}$ | **6** | **8** | **5** | 0+1 |
| $A_4$ | 5 | 4 | 6 | 4 | 0 |
| | 7-1 | 6-1 | 8-1 | 5-1 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | 4 | $\boxed{7}$ | 3 | 0 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3$ | $\boxed{7}$ | **6** | **8** | **5** | 1 |
| $A_4$ | 5 | 4 | 6 | $\boxed{4}$ | 0 |
| | 6 | 5 | 7 | 4 | |

| | $B_1^*$ | $B_2^*$ | $B_3^*$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1^*$ | **6** | 4 | $\boxed{7}$ | 3 | 0+1 |
| $A_2$ | **5** | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3^*$ | $\boxed{7}$ | **6** | **8** | 5 | 1+1 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 0 |
| | 6-1 | 5-1 | 7-1 | 4 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | 4 | $\boxed{7}$ | 3 | 1 |
| $A_2$ | **5**$^*$ | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3$ | $\boxed{7}^*$ | **6**$^*$ | **8** | 5 | 2 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 0 |
| | 5 | 4 | 6 | 4 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | 4 | $\boxed{7}$ | 3 | 1 |
| $A_2$ | $\boxed{5}$ | 3 | 5 | 3 | 0 |
| $A_3$ | **7** | $\boxed{6}$ | **8** | 5 | 2 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 0 |
| | 5 | 4 | 6 | 4 | |

Itt a kapott teljes párosítás súlya $5+6+7+4=22$, a kapott súlyozott lefogásé $1+0+2+0+5+4+6+4=22$. A tanultak alapján tehát a súlyozott lefogások minimális összsúlya 22.

*Más megoldás:* Sőt, a bátrabbak még mást is csinálhatnak (szintén max pontszámért): a kapott súlyozott lefogásunkból indulva is lehet futtatni az Egerváry-algoritmus lépéseit; ugyan ez nem a szokásos kiindulási súlyozott lefogásunk (sorsúlyok = 0, oszlopsúlyok = legnagyobb elem), de ez igazából nem zavarja az algoritmust. Így jóval gyorsabban végzünk, mintha a szokásos kezdeti súlyozott lefogásból indulnánk: az első lépésben a súlyozást módosítjuk (első és harmadik oszlop súlya eggyel csökken, első soré eggyel nő), a pontos élek aktualizálása után pedig rögtön találunk a pontos élekből max súlyú teljes párosítást ($A_2B_1$, $A_3B_2$, $A_1B_3$, $A_4B_4$). Részletek: **(8 pont)**

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $\boxed{6}$ | **4** | **7** | 3 | 1 |
| $A_2$ | 5 | 3 | 5 | 3 | 1 |
| $A_3$ | 7 | $\boxed{6}$ | 8 | 5 | 3 |
| $A_4$ | 5 | **4** | 6 | $\boxed{4}$ | 1 |
| | 5 | 3 | 6 | 3 | |

| | $B_1^*$ | $B_2$ | $B_3^*$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1^*$ | $\boxed{6}$ | 4 | **7** | 3 | 1+1 |
| $A_2$ | **5** | 3 | 5 | 3 | 1 |
| $A_3$ | **7** | $\boxed{6}$ | **8** | 5 | 3 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 1 |
| | 5-1 | 3 | 6-1 | 3 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $\boxed{6}^*$ | 4 | **7**$^*$ | 3 | 2 |
| $A_2$ | **5**$^*$ | 3 | 5 | 3 | 1 |
| $A_3$ | **7** | $\boxed{6}$ | **8** | 5 | 3 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 1 |
| | 4 | 3 | 5 | 3 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **6** | 4 | $\boxed{7}$ | 3 | 2 |
| $A_2$ | $\boxed{5}$ | 3 | 5 | 3 | 1 |
| $A_3$ | **7** | $\boxed{6}$ | **8** | 5 | 3 |
| $A_4$ | **5** | **4** | **6** | $\boxed{4}$ | 1 |
| | 4 | 3 | 5 | 3 | |

A kapott teljes párosítás és súlyozott lefogás összsúlya egyaránt 22, igazolva az előbbi maximalitását és az utóbbi minimalitását.
(Eljárás lépéseinek helyes kivitelezése: **(5 pont)**; kapott súlyozott lefogás minimalitásának indoklása: **(2 pont)**; konklúzió a *a)*-ben kapott súlyozott lefogás minimalitásáról: **(1 pont)**.)

Ha valaki az Egerváry-algoritmust helyesen futtatva prezentál egy max súlyú teljes párosítást és egy min összsúlyú súlyozott lefogást, de a feladat többi részletéről nem nyilatkozik, az erre **(7 pont)**-ot kaphat.

---

**3. a)** Oldjuk meg a jobbra látható LP feladatot. **(9 pont)**
**b)** Lehetséges-e olyan célfüggvényt adni az LP lineáris feltételeihez, melyre van olyan optimális $x,y$ megoldás, melyben sem $x$, sem $y$ nem egész? **(4 pont)**

$$\max 2x+3y, \text{ ha}$$
$$x+y \geq 200$$
$$x+y \leq 650$$
$$8x-y \geq 250$$
$$5x-4y \leq 1900$$

*Megoldás:* **a)** Jelöljük a négy lineáris feltétel határegyenesét $e_1,\ldots,e_4$-gyel. Némi számolással adódik, hogy a rendszer $(x,y)$ megoldásai által alkotott $P$ sokszögtartomány csúcsai $e_1\cap e_3=(50,150)$, $e_1\cap e_4=(300,-100)$, $e_2\cap e_3=(100,550)$, $e_2\cap e_4=(500,150)$.
(Ne ijedjünk meg attól, hogy az első két feltételünkből kapott $e_1$ és $e_2$ egyenesek párhuzamosak; ennek köszönhetően eggyel kevesebb egyenespár metszéspontjával kell bíbelődnünk. A harmadik és negyedik feltétel határegyenesének $e_3\cap e_4$ metszéspontja nem rendelkezik „szép” koordinátákkal, ellenben mindkét koordináta látványosan negatív, így a pontos kiszámításuk nélkül is látszik, hogy az első feltételt nem teljesítik, tehát $e_3\cap e_4$ nem lesz a $P$ csúcsa. De úgy is érvelhetünk, hogy ha már négy csúcsot megtaláltunk, akkor az ötödik jelöltet ki sem kell számolnunk, hiszen a négy egyenessel határolt $P$ tartományunk ilyen esetben négyszög kell legyen, ötödik csúcs felbukkanása nem várható.) **(5 pont)**
Azt tanultuk, hogy tetszőleges célfüggvény esetén az optimum felvétetik valamelyik csúcsban; elég tehát kiszámolni a csúcsokra a célfüggvény értékét. Ez a $(100,550)$ csúcsra lesz maximális (és másra nem), az

értéke pedig 1850. **(2+2 pont)**

**b)** Lehetséges. Mivel minden csúcs koordinátái egész számok, csak úgy lehet ilyen célfüggvény, ha a megfelelő támaszegyenes a $P$ tartományt egy élben metszi. Például ilyen célfüggvény a $\min x+y$. **(2 pont)**

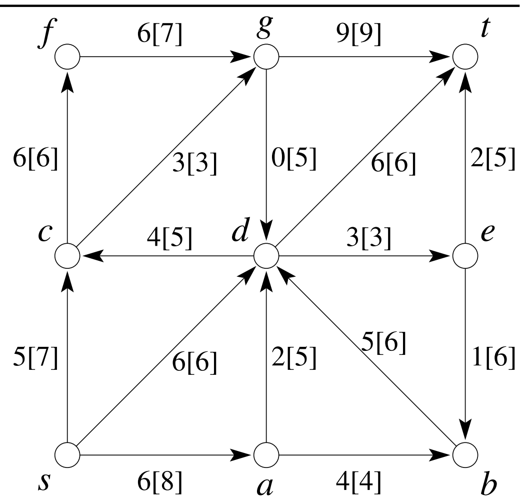
Az él belsejében van nem csupa egész koordinátájú pontja $P$-nek, például $(50+\frac{1}{2}, 150-\frac{1}{2})$. **(2 pont)**

---

**4.** A jobbra látható hálózatban az élekre szögletes zárójelben írt számok az élek kapacitását jelzik, az élekre zárójel nélkül írt számok pedig egy $st$-folyamnak az éleken felvett értékei.

**a)** A tanult javító utas algoritmus használatával állapítsuk meg, hogy a megadott folyam maximális nagyságú-e. Ha igen, adjunk erre bizonyítékot. Ha nem, akkor a tanult módon növeljük a folyamot addig, míg maximális folyamot nem kapunk (és igazoljuk is a kapott folyam maximalitását). **(8 pont)**

**b)** Az $sd$ és a $dt$ élek közül egynek bővíthetjük a kapacitását. Melyik él kapacitását növeljük és mennyivel, hogy az új hálózatban a maximális folyamérték a lehető legnagyobb legyen? (A felesleges kapacitásbővítés kerülendő.) **(6 pont)**

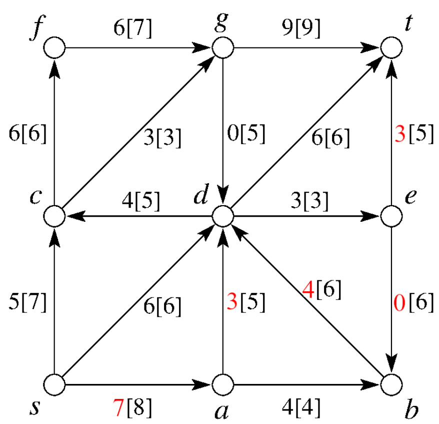


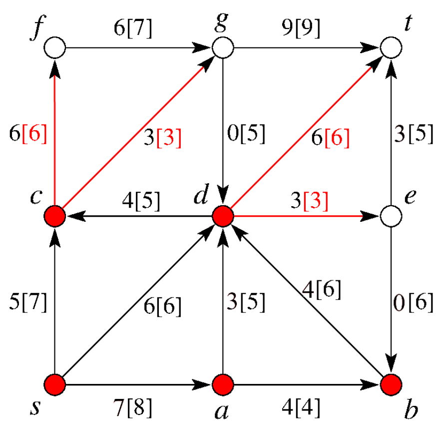

*Megoldás:* **a)** Javító út (kereshetjük ránézésre vagy segédgráffal is) például az $s,a,d,b,e,t$; az előreéleken ($sa,ad,et$) eggyel növelve, a visszaéleken ($db,be$) eggyel csökkentve a folyam értékét a folyam nagysága eggyel nő (ld alább, bal ábra), **(3 pont)**

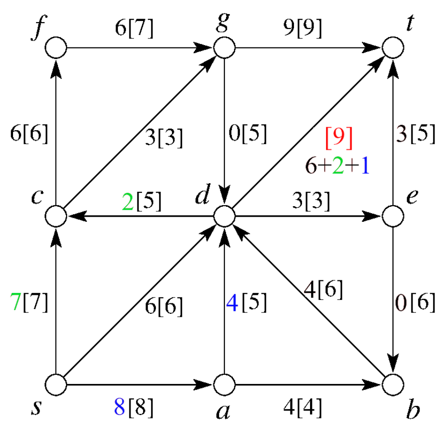
tehát az eredeti nem volt maximális. **(0 pont)**

A javítás után az $s$-ből javító úton elérhető csúcsok halmaza $X=\{s,a,b,c,d\}$ (sokféleképpen megtalálhatjuk, például segédgráf segítségével); **(2 pont)**

egy vágás kapacitása a belőle kilépő élek ($cf,cg,dt,de$) kapacitásainak összege, jelen esetben $6+3+6+3=18$ (ld alább, középső ábra). **(1 pont)**




A módosított folyamunk nagysága, mivel nincs $s$-be belépő él, az $s$-ből kilépő éleken a folyamértékek összege, azaz $5+6+7=18$. **(1 pont)**

A tanultak szerint egyetlen folyam nagysága sem haladhatja meg egyetlen vágás kapacitását sem, tehát a folyamunk maximális. **(1 pont)**

**b)** Az $sd$ él nem lép ki a korábban talált minimális $X$ vágásunkból, így annak az $sd$ él kapacitását növelve az $X$ vágás kapacitása változatlanul 18 marad, és emiatt a maximális folyamnagyság sem lehet nagyobb 18-nál. Így az $sd$ él kapacitását nem érdemes bővíteni. **(2 pont)**

A $dt$ él kapacitását viszont érdemes bővíteni (lásd feljebb, jobb ábra), mert a kapacitás bővítése után kapunk javító utakat: az $s,c,d,t$ javító úton maximum 2-vel (as $sc$ él miatt többel nem), az $s,a,d,t$ javító úton maximum 1-gyel (az $sd$ él miatt többel nem) meg tudjuk növelni a folyam nagyságát. Tehát érdemes a $dt$ él kapacitását 9-re bővíteni. **(2 pont)**

Nagyobbra viszont nem, mert a folyamunk növelésének gátat szab az $s$-ből kilépő élek összkapacitása is (ez egy másik vágás ugye), ami $7+6+8=21$. **(2 pont)**