Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH (2025.04.02. 18-20, Q-I)

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét**, a **Neptun kódját** és a **gyakorlatvezetőjének nevét** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert, és az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével döntsük el, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk meg egy megoldást, ha nem, akkor adjunk erre bizonyítékot a Farkas-lemma alkalmazásával. **(11 pont)**

$$\begin{aligned} x+2y-3z &\leq -4 \\ x-y+6z &\geq 2 \\ x+3y &\leq 10 \\ y-2z &\geq -1 \end{aligned}$$

---

2. Az oldalt látható mátrix az $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ és $\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az A_iB_j él súlya az A_i indexű sor és a B_j indexű oszlop metszetében álló szám. A sorok és oszlopok utolsó elemei a megfelelő csúcshoz rendelt súlyok.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	4	7	3	0
A_2	5	3	5	3	0
A_3	7	6	8	5	2
A_4	5	4	6	4	0
	5	3	6	3	

a) Mi az a legkisebb $\delta \geq 0$ szám, melyet az A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsok mindegyikének súlyához hozzáadva (és a B_1, B_2, B_3, B_4 csúcsok súlyait változatlanul hagyva) a módosított csúcssúlyok súlyozott lefogást alkotnak? (Akár $\delta = 0$ is lehet.) Indokoljuk is meg, hogy a megadott δ szám valóban megfelelő, de annál kisebb szám nem. **(4 pont)**

b) Az előző kérdésben a módosítás után kapott súlyozott lefogás vajon minimális összsúlyú-e? Ha igen, indokoljuk meg, miért az. Ha nem az, adjunk egy minimális összsúlyú súlyozott lefogást (és indokoljuk is meg a minimalitását). **(8 pont)**

(Ha a feladat egyes részleteihez esetleg nincs ötletünk és elakadnánk, akkor nem árthat egy alkalmas módszerrel meghatározni a páros gráfunk egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.)

---

3. **a)** Oldjuk meg a jobbra látható LP feladatot. **(9 pont)**

b) Lehetséges-e olyan célfüggvényt adni az LP lineáris feltételeihez, melyre van olyan optimális x,y megoldás, melyben sem x, sem y nem egész? **(4 pont)**

$$\max 2x+3y, \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} x+y &\geq 200 \\ x+y &\leq 650 \\ 8x-y &\geq 250 \\ 5x-4y &\leq 1900 \end{aligned}$$

---

4. A jobbra látható hálózatban az élekre szögletes zárójelben írt számok az élek kapacitását jelzik, az élekre zárójel nélkül írt számok pedig egy st-folyamnak az éleken felvett értékei.

a) A tanult javító utas algoritmus használatával állapítsuk meg, hogy a megadott folyam maximális nagyságú-e. Ha igen, adjunk erre bizonyítékot. Ha nem, akkor a tanult módon növeljük a folyamot addig, míg maximális folyamot nem kapunk (és igazoljuk is a kapott folyam maximalitását). **(8 pont)**

b) Az sd és a dt élek közül egynek bővíthetjük a kapacitását. Melyik él kapacitását növeljük és mennyivel, hogy az új hálózatban a maximális folyamérték a lehető legnagyobb legyen? (A felesleges kapacitásbővítés kerülendő.) **(6 pont)**