

Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

10. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Megfigyelés. Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy $\max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$.

Cél: olyan feltétel, ami biztosítja, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris* (TU), ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1 . **Megfigyelés.** TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1 .

Állítás. Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1) -gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát/oszlopát megismételjük/töröljük, (4) két sorát/oszlopát felcseréljük, (5) A -t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral/oszloppal bővítjük.

Tétel. Tfh A TU mátrix és b vektor koordinátái egészek. Ekkor a $\max cx: Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n$ IP feladatra és LP relaxáltjára $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DIP-re és relaxáltjára (DLP) teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együttthatómátrix és egész konstansok (ill. célvegyűthetők) esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.

Definíció. A $G = (V, E)$ irányított gráf $B(G)$ *illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V -nek, oszlopai E -nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v, e) pozícióban 1 áll, ha e a v -ből kilép, -1 , ha belép, és 0, ha v nem végpontja e -nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e -nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.

Állítás. Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.

Következmény. Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u, v)$ jelöli az u -ból v -be vezető, páronként éldisjunkt utak max számát. Menger tétele miatt ez egyenlő az u -t és v -t szeparáló élhalmazok minimális méretével, azaz a legkisebb olyan X élhalmaz mérete, melyre u és v a $G - X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van. Hasonlóan, $\kappa(u, v)$ pedig az u -ból v -be vezető páronként belsőleg pontdisjunkt utak maximális számát jelöli. Ha u és v nem szomszédosak, Menger tétele szerint ez egyenlő az u -t és v -t szeparáló csúcsalmazok minimális méretével, azaz legkisebb olyan X csúcsalmaz mérete, melyre u és v a $G - X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van (ilyenkor $u, v \notin X$ szükségszerű).

Definíció. G k -szorosan élösszefüggő, ha bármely legfeljebb $k - 1$ élét elhagvva összefüggő marad (ha G nem összefüggő, akkor 0-élösszefüggő). A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$. Ez megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő; másképpen szólva $\lambda(G)$ az a legnagyobb k , melyre G k -élösszefüggő.

Definíció. G k -szorosan (pont)összefüggő, ha bármely legfeljebb $k - 1$ csúcsát elhagvva összefüggő marad, és $|V(G)| \geq k + 1$ (ha G nem összefüggő, akkor 0-élösszefüggő). A G *(pont)összefüggőségi száma* $\kappa(G) := \min\{\kappa(u, v) : u, v \in V\}$; másképpen szólva $\kappa(G)$ az a legnagyobb k , melyre G k -(pont)összefüggő. Ha G -ben vannak nem szomszédos csúcsok, akkor ez megegyezik azon csúcsok minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő, továbbá $\kappa(G) := \min\{\kappa(u, v) : u, v \in V, uv \notin E(G)\}$.

Definíció. A G *(él)vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhalmazából induló élek $E(X)$ halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés. Adott u, v -re egy folyamalgoritmustal meghatározható $\lambda(u, v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmustal található minimális vágás. (Sőt: $n - 1$ is elég, hiszen u rögzíthető.)

Megfigyelés. Legyen u és v a G multigráf két különböző csúcsa. Ha G -nek van az u -t és v -t szeparáló minimális vágása, akkor $\lambda(G) = \lambda(u, v)$. Ha nincs ilyen minimális vágása G -nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek az u és v csúcsok összeragasztásával (összeolvasztásával) képzett G/uv gráf minimális vágásaival, azaz $\lambda(G) = \lambda(G/uv)$.

Definíció. A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \leq i \leq n - 1$ esetén a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazba a v_i csúcsból legalább annyi él megy, mint bármely v_j -ből, ha $j > i$. Azaz a soron következő v_i csúcs mindig a korábbi csúcsok halmazához legtöbb éllel kapcsolódó csúcsok egyike.

Lemma. Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a $\{v_n\}$ minimális élszáma olyan vágást határoz meg, ami v_n -et és v_{n-1} -et szeparálja.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus

Input: $G = (V, E)$ multigráf,

Output: G egy X minimális vágása.

I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \dots, v_n$ maxvissza sorrendjét.

II. Felírjuk a v_n -ből kiinduló élek halmazát (minvágásjelölt).

III. Ha több mint két csúcs van, összeragasztjuk a v_n és v_{n-1} csúcsoakat. GoTo I.

IV. Ha már csak két csúcs van, akkor az $n - 1$ feljegyzett minvágásjelöltre kiválasztjuk az egyik legkisebbet. Ez egy minvágás lesz G -ben, mérete G élösszefüggőségi száma. (Vegyük észre: az összeragasztások miatt a minvágásjelöltek az eredeti G -ben nem feltétlenül egy csúcsból, hanem egy csúcshalmazból kilépő élek halmazai.)

Gyakorlatok

1. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-faktora alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F -beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

Megoldás: Minden e élhez egy-egy $x(e)$ változó fog tartozni, és olyan IP-t szeretnénk felírni, aminek a megoldásai kizárólag a 2-faktorok karakterisztikus vektorai lesznek. (Egy 2-faktor karakterisztikus vektora egy élen annak megfelelően vesz fel 1 ill. 0 értéket, hogy az adott él hozzátartozik-e a 2-faktorhoz vagy sem.)

Nekünk a karakterisztikus vektorával megadott 2-faktor éleinek összsúlyát kell maximalizálni. Itt látszik a karakterisztikus vektor egy előnye: az összsúly felírható $\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x(e)$ alakban, ugyanis ha $x(e) = 0$, akkor az e él súlya nem szerepel az összegben, ha pedig $x(e) = 1$, akkor az e él hozzájárulása éppen $c(e)$. A célfüggvény tehát megvan, keressük meg az IP feltételeket. Kezdjük a karakterisztikus vektor tulajdonság megkövetelésével: megkívánjuk minden e élre az $x(e) \geq 0$ nemnegativitási és az $x(e) \leq 1$ lineáris feltételeket, valamint az $x(e) \in \mathbb{Z}$ egészértékűségi feltételt. E három feltételt minden $x(e)$ -re megkövetelve elértük, hogy a megoldás csakis egy élhalmaz karakterisztikus vektora lehet.

A 2-faktor tulajdonság minden v csúcsra megkívánja, hogy pontosan két él induljon v -ből, és ezt könnyű lineáris feltétellel átfogalmazni: minden $v \in V$ esetén a $\sum_{e: v \in e} x(e) = 2$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Világos, hogy tetszőleges 2-faktor karakterisztikus vektora teljesíti minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vagy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból pontosan két olyan élnek kell kiindulnia, amelyekhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\{e \in E(G) : x(e) = 1\}$ élhalmaz egy 2-faktor, más szóval x egy 2-faktor karakterisztikus vektora.

A feladat második kérdéséhez azt figyeljük meg, hogy miféle mátrix írja le a fenti IP feladatot. Az $x(e) \leq 1$ felső korlátokért egy egységmátrix felel, a 2 jobboldalú egyenlőtlenségekhez pedig epp a G illeszkedési mátrixa tartozik. (Ennek azért érdemes utánagondolni.) Mivel a páros gráf illeszkedési mátrixa TU, és ezt egységvektor-sorokkal bővítettük, az IP probléma mátrixa TU tulajdonságú. (Ha G nem lenne páros, akkor ez nem lenne igaz, ahogy a gondolatmenet további része sem állna.) Ráadásul a jobboldalon álló konstansok is egészek, ezért a TU mátrixokról tanultak miatt az egészértékűségről szóló kikötések elhagyásával keletkező LP probléma (az ún. LP-relaxáció) azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az LP optimális megoldásai között van olyan is, amelyikben minden változó egész értéket vesz fel.

Az LP duálisának felírásához megint számravezetőt rajzolunk.

		E		
		$x_1 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0$		
E	$y \geq 0$	I	≤ 1	Az éleknek megfelelő egyenlőtlenségeknek a nemnegatív y változók, a csúcsokhoz tartozó egyenlőségeknek az előjelkötetlen z -k felelnek meg. Az x -ek nemnegatívak, ezért a duálfeltételek egyenlőtlenségek.
V	z	$B(G)$	$= 2$	
		$\geq c$		

$$\min \{ \tilde{y}(E) + 2 \cdot \tilde{z}(V) \}$$

$$\text{ha } y \geq 0$$

$$y(e) + z(u) + z(v) \geq c(e)$$

$$\text{minden } e = uv \text{ élre}$$

2. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor a $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i, j)$ és $10^6 \cdot b(i, j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i, j) \leq b(i, j)$ egész számok.

Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?

(Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)

Megoldás: Vezessünk be minden csapathoz egy-egy változót: az i csapathoz tartozzék az $x(i)$. Tekintsük azt a lineáris programozási feladatot, amelyben az $x(1) + x(2) + \dots$ összeget kell maximalizálni, az alábbi feltételek mellett. Minden i -re teljesül, hogy egyrészt $x(i) \geq 0$, másrészt $a(i, j) \leq x(i) - x(j) \leq b(i, j)$ teljesül minden olyan esetben, amikor az i

csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)

A feladat szövege alapján a fenti LP probléma megoldható, hisz az $x(i) = p(i)/10^6$ választással a feltételeket kielégítő megoldást kapunk (ami persze nem feltétlenül optimális). (2 pont)

Közelebbről megnézve az adódik, hogy az LP problémához tartozó mátrix két részből áll: az irányított G gráf incidenciamátrixának transzponáltjából ill. ezen transzponált (-1) -szereséből, ahol a G gráf csúcsai a csapatok, és élei pedig a nem döntetlenre végződő mérkőzésekhez tartoznak: az i csapatból a j csapatba akkor fut irányított él, ha az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)

A tanultak szerint a szóban forgó mátrix TU tulajdonságú. (2 pont)

Ezért ha a célfüggvényérték alulról korlátos, akkor az optimális megoldások között van olyan is, amelyik esetén minden $x(i)$ változó egész értéket vesz fel. (1 pont)

A nemnegativitási feltételek miatt a célfüggvényérték mindig nemnegatív, így a célfüggvényérték csakugyan alulról korlátos. Ezért a felírt LP-nek van egész optimauma, és az ezen optimális megoldásban szereplő változók egymilliószorosai olyan jutalmazást írnak le, ami teljesíti a feladatban megkívánt feltételeket. (1 pont)

3. a) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van megoldása, de nincs egészértékű megoldása?

b) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van egészértékű megoldása, de az optimumot nem veszi fel egészértékű megoldáson?

Megoldás: **a)** Van: $x \leq 1, x \in \mathbb{Z}, \max \frac{1}{2}x$ (az együtthatómátrix az 1×1 -es egységmátrix, ami persze TU). Ennek és LP relaxáltjának persze $x = 1$ optimális megoldása. A DLP $y \geq 0, y = \frac{1}{2}$, min y alakú, melynek van megoldása, de nincs egész megoldása.

b) Ilyen is van: $x \geq 0, x \leq 1, x \in \mathbb{Z}, \max \frac{1}{2}x$. Ennek és LP relaxáltjának persze $x = 1$ optimális megoldása. A DLP $y \geq 0, y \leq \frac{1}{2}$, min y alakú, melynek a célfüggvényt minimalizáló egész megoldása $y = 1$, és erre a célfüggvény értéke 1, de a DLP optimauma $\frac{1}{2}$.

4. Vezessük le Egerváry tételét (páros gráfok max súlyú teljes párosításairól és minimális összsúlyú súlyozott lefogásairól) az LP dualitástételből és a TU mátrixokról tanultakból.

5. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor a tanult ötféle művelet eredményeképpen valóban TU mátrixot kapunk.

6. a) Mutassuk meg, hogy ha G k -szorosan élösszefüggő (azaz $\lambda(G) \geq k$), akkor G -ben minden csúcs foka legalább k .

b) Mutassunk olyan gráfot, ahol minden csúcs foka legalább k , de a gráf nem k -szorosan élösszefüggő.

Megoldás: **a)** Tetszőleges v csúcsra a v -ből induló éleket elhagyva izolált csúcs keletkezik, tehát a kapott gráf nem összefüggő, így $d(v)$ (v fokszáma) darab él már alkothat vágást; tehát $k = \lambda(G) \leq d(v)$.

b) Ez a feltétel még az összefüggőséget sem tudja önmagában garantálni, vegyünk például egy két komponensű gráfot, ahol mindkét komponens $k+1$ csúcsú teljes gráf. Így minden fokszáma k , de nem is összefüggő, nemhogy k -élőf volna.

7. Legyen F egy legalább két pontú fa.

a) Mennyi $\lambda(F)$?

b) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy megnőjön az élösszefüggőségi száma?

8. Legyen G egy körmentes gráf.

a) Legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy összefüggő legyen?

b) És legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy kétszeresen összefüggő legyen?

9. Legyenek a G gráf csúcsai a 8×8 -as sakktábla mezői, és pontosan akkor kössön össze él két csúcsot, ha a megfelelő mezők élszomszédosak.

a) Határozzuk meg $\lambda(G)$ értékét.

b) Mennyi $\lambda(A1, H8), \lambda(A2, H7), \lambda(B4, H4)$?

c) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy $\lambda(G)$ eggyel megnőjön?

Megoldás: (vázlatos)

a) Bármely két csúcs közt könnyen mutathatunk két élidegen utat, tehát $\lambda(G) \geq 2$. Másrészt a sarkok fokszáma csak kettő, tehát két él törlésével megszüntethető az összefüggőség, így $\lambda(G) \leq 2$.

b) Ebben a G gráfban $\lambda(u, v) = \min\{d(u), d(v)\}$; az triviális, hogy nem lehet több, de itt kevesebb sem, mert könnyen mutatunk megfelelő számú élidegen utat. **c)** Két él legalább kell, hogy mind a négy sarok fokszáma megnőjön 3-ra, és ennyi elég is két-két sarkot összekötve.

10. a) Adjunk hatékony eljárást egy irányítatlan gráfban tetszőleges $u \neq v$ csúcsok esetén a $\lambda(u, v)$ meghatározására.

b) Adjunk hatékony eljárást irányítatlan G gráf esetén $\lambda(G)$ meghatározására.

11. Az MFMC algoritmus segítségével adjunk eljárást egy G gráfban $\kappa(u, v)$, illetve $\kappa(G)$ meghatározására.

12. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy legalább 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban (ld pl. korábbi ZH-k).

Megoldás: Az előadáshoz tartozó diasoron van egy konkrét példa, de a korábbi ZH-k megoldásai között is találunk.

13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban található olyan (u_1, w_1) és (u_2, w_2) pontpárok, amikre $w_1 \neq w_2$, valamint $\lambda(u_1, w_1) = d(w_1)$ és $\lambda(u_2, w_2) = d(w_2)$ teljesül.

Megoldás: Az órán azt tanították, hogy a maxvissza sorrend utolsó két pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azaz ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ egy maxvissza sorrend, akkor $u_1 = v_{n-1}, w_1 = v_n$ jó választás. Csupán egy másik hasonló tulajdonságú (u_2, w_2) párt kell találni úgy, hogy w_2 különbözzék w_1 -től. Ehhez elegendő egy másik maxvissza sorrendet találni, aminél garantálni tudjuk, hogy az utolsó csúcs nem w_1 lesz.

Azért annyira ez se bonyolult: készítsünk úgy egy másik maxvissza sorrendet, hogy w_1 az első csúcs ebben a másik sorrendben. Az utolsó csúcs így garantáltan nem w_1 lesz, tehát az így kapott maxvissza sorrend utolsó két csúcsa megfelel u_2 -nek és w_2 -nek.

14. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: 7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$ -t. Igaz-e, hogy G -nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$ -vel?

Megoldás: Az órán tanultak szerint $\lambda(G)$ megegyezik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus során a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcsok fokszámai közül a legkisebbikkel. Ez a konkrét esetben $\lambda(G) = 4$ -nek adódik.

Olyat is tanítottak, hogy $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$, azaz a maxvissza sorrend utolsó két pontját elválasztó vágások között minimális számú élt tartalmaz az a vágás, amelynek egyik oldalán a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcs áll. Mivel minden egyes maxvisszasorrend-számítás után a sorrend két utolsó pontját összeragasztjuk, ezért amikor a negyedik maxvissza sorrendben az utolsó csúcs foka 4 lett, addig összesen 3 összeragasztást hajtottunk végre. Ezért a negyedik maxvissza sorrend utolsó csúcsa által reprezentált X ponthalmaz G -nek legfeljebb 4 pontját tartalmazhatja.

Mivel ez az X a G egy minimális vágását határozza meg, ezért a második kérdésre igenlő a válasz: van olyan legfeljebb 4 elemű ponthalmaza G -nek, ami G minimális vágását indukálja.