Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

8. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Egészértékű / vegyes lineáris program (Integer / Mixed Linear Program, ILP / MIP): egy szokásos lineáris program (változók, lineáris feltételek (egyenletek és egyenlőségek), lineáris célfüggvény), de azt is előírjuk, hogy minden / néhány változó csak egész értéket vehet föl.

Szóhasználat: igen / nem típusú döntéseket gyakran bináris, azaz csak 0 és 1 értéket fölvenni tudó változókkal kódolunk. Ezeket szokás *indikátorváltozónak* nevezni. Ha egy megfelelő tulajdonságú halmazt keresünk, akkor minden szóba jövő elemről el kell döntenünk, hogy beletesszük-e a halmazunkba. A szóba jövő elemeknek megfelelő változókat egy vektorba rendezve kapjuk a halmaz *karakterisztikus vektorát*, ebben tehát a koordináták a szóba jövő elemeknek (pl az alaphalmaz elemeinek) felelnek meg, és aszerint 0 vagy 1 az értékük, hogy a megfelelő elem benne van-e a halmazunkban vagy sem.

Jó tudni: LP problémákra van jónéhány elméletileg és a gyakorlatban is hatékony, ténylegesen implementált algoritmus, tehát LP feladatokat többnyire gyorsan meg lehet oldani nagyobb modellek esetében is. Ezzel szemben az IP feladatokra nincsen univerzálisan hatékony megoldási módszer (bizonyítottan kemény dió), de azért vannak működő, implementált algoritmusok, melyek kisebb vagy szerencsésebb IP modellek esetében megbirkóznak a feladattal.

Gyakorlatok

1. Adott $G=(V,E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek, ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását.

2. Adott G összefüggő, legalább két csúcsú gráf kromatikus számát szeretnénk megállapítani. Írjunk fel olyan IP feladatot, amivel ez megtehető.

3. Már láttuk, hogy a folyamproblémát könnyű megfogalmazni LP feladatként. Nézzük a következő variánst: adott (G,s,t,c) hálózaton most még üzemeltetési költségek is vannak: minden e élre adott egy $d(e)$ egyégnyi szállítási költség, tehát ha az e élen $x(e)$ mennyiségű terméket akarunk szállítani, azért $x(e)d(e)$ díjat kell fizetnünk. Hogyan lehetne minimális költségű maximális folyamot keresni LP módszerekkel?

4. Az előző feladathoz képest annyiban változott a helyzet, hogy a hálózatot üzemeltető cég változtatott a díjszabásán: élhasználati díjat vezet be, azaz minden egyes élre megad egy (pozitív) $d(e)$ költséget, melyet akkor kell megfizetni, ha használni szeretnénk az adott e élt, függetlenül attól, hogy mennyi terméket szállítunk az adott élen. Adjunk olyan MIP modellt, mellyel találhatunk minimális költségű maximális folyamot.

5. Piréziában besúgóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszervezésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.
Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt. (Ismertnek tekinthetjük Pirézia lakosainak, városainak és családjainak P, V, illetve CS halmazát, ahol V és CS elemei az adott város lakóiból, illetve család tagjaiból álló halmazok.)

6. Piréziában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerősét beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre.
Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.
(A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)

7. Adott $G=(V,E)$ irányított gráf, $s,t\in V$ csúcsok és $\ell : E\to\mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel IP (vagy LP) feladatként a legrövidebb st-út meghatározását.

8. Adott $G=(V,E)$ gráf és $c:E\to\mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosítás feladatát IP feladatként. Tekintsük a feladat LP relaxációját is (ahol egész helyett valós számokat is megengedünk a megoldásban). Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra a célfüggvény maximuma az IP és az LP relaxáció esetén egybeesik?

9. Egy sakktáblára szeretnénk minél kevesebb huszárt (lovat) föltenni úgy, hogy a tábla minden mezőjét legalább az egyik huszár támadja. Írjunk föl olyan LP vagy IP feladatot, melynek megoldásával meghatározható a huszárok minimálisan szükséges száma és egy optimális elrendezés.