Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

7. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Farkas-lemma: $\exists x: \; Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0$. Más szóval: az $Ax \leq b$ és az $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ lineáris rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása.

Definíció: *Lineáris program* (LP) alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett. Persze az összes feltétel megfogalmazható csak $\leq$ típusú egyenlőtlenségek használatával.

Geometriai interpretáció két változó esetén. Egy $ax+by=c$ egyenlet (x,y) megoldásai a síkon egy ((a,b) normálvektorú) egyenest alkotnak. Egy $ax+by \leq c$ egyenlőtlenség (x,y) megoldásai a síkon az előző egyenes által határolt, zárt félsíkot alkotnak. Néhány egyenlőtlenség közös megoldásai az egyenlőtlenségekhez tartozó félsíkok metszetében levő (x,y) pontok halmaza, ami egy konvex poliéder (ami lehet üres, ha nincs megoldás; és esetleg előfordulhat az is, hogy nem korlátos (végtelenül nagy)). Tegyük föl, hogy egy kétváltozós egyenlőtlenségrendszer olyan (x,y) megoldását keressük, ahol c_1x+c_2y maximális. Azaz, ha P jelöli az egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló poliédert, akkor olyan $(x,y) \in P$ pontot keresünk, amelyre a lehető legnagyobb a c_1x+c_2y összeg. Azok az (x,y) pontok a síkon, amelyekre a $c_1x+c_2y = p$ valamilyen konstans $p \in \mathbb{R}$-re, egy e egyenest alkotnak. Ráadásul, ha p értékét növeljük / csökkentjük, akkor az egyenes a (c_1,c_2) normálvektor irányában / ellenkező irányban megy át egy párhuzamos egyenesbe). Ha tehát a P konvex sokszögnek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a normálvektor által mutatott irány szerinti „végtelen távolból" indítva addig kell tolni a P sokszög felé, amíg az eltoltnak közös pontja nem lesz P-vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük P-nek azt az e-vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a (c_1,c_2) normálvektor irányába már nem esik P-nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló megoldásai az egyenes ezen eltoltjának és P-nek a közös pontjai lesznek. Ezen optimális megoldások halmaza vagy egy csúcsa, vagy egy éle lesz P-nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. Az optimum meghatározása innentől egyszerű: P minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs fog maximalizálni, amelyikre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás.

Lineáris program sztenderd mátrixos alakja. Az $x_1,\ldots,x_n = x$ változókkal felírt minden lineáris egyenlet, egyenlőtlenség, nemnegativitási feltétel átírható $\leq$ egyenlőtlenségek segítségével, és így $Ax \leq b$ alakba. Lineáris program: a cx célfüggvény értékét akarjuk maximalizálni az $Ax \leq b$ feltételt teljesítő x-eken, azaz a feladat $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$. A feladatot vizsgálva két alternatív párt írhatunk föl a Farkas-lemma alapján:

$$\textbf{(I)}\;\; Ax \leq b \;\leftrightsquigarrow\; \textbf{(II)}\;\; y \geq 0, yA = 0, yb < 0$$
$$\textbf{(A)}\;\; Ax \geq 0, cx < 0 \;\leftrightsquigarrow\; \textbf{(B)}\;\; y \geq 0, yA = c$$

Mindkét párnak pontosan az egyik tagja oldható meg. Az (I) megoldhatósága az $Ax \leq b$ feltételek kielégíthetőségét jelenti, az (A) megoldhatósága pedig a cx célfüggvény korlátlan növelhetőségét. Tehát a $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$ LP megoldható és a célfüggvénye korlátos fölülről $\iff$ az (I) és a (B) rendszereknek van megoldása.

Duális lineáris program, DLP: a $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$ (primál) LP *duálisa* a $\min\{yb\colon y \geq 0, yA = c\}$ LP.

A (B) megoldhatósága a DLP megoldhatóságát jelenti, míg a (II) megoldhatósága a DLP célfüggvényének korlátlan csökkenthetőségét.

Ha (I) és (B) megoldhatók, azaz mind az LP-nek, mind a DLP-nek van megoldása (legyen egy-egy ilyen x_0 és y_0), akkor ezekre a megoldásokra a célfüggvényértékek $cx_0 = (y_0A)x_0 = y_0(Ax_0) \leq y_0b$, tehát az LP és a DLP megoldásaihoz tartozó célfüggvényértékek egymást korlátozzák. Az optimális megoldásokra vonatkoztatva kapjuk, hogy $\max\{cx\colon Ax \leq b\} \leq \min\{yb\colon y \geq 0, yB = c\}$. Később látni fogjuk, hogy itt valójában mindig egyenlőség teljesül.

Gyakorlatok

1. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért, a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

Megoldás: Jelölje x, ill. y a készítendő vakond-, ill. nyúlnadrágok számát. A feltételek alapján az alábbi egyenlőtlenségeket kell teljesítenie x-nek és y-nak, melyeket egyszerűsíthetünk is a számolásokat megkönnyítendő:

$$\begin{array}{rrcl c rcl}
\text{SZ:} & 6x+12y & \le & 1800 & \iff & x+2y & \le & 300 \\
\text{V:} & 8x+4y & \le & 1400 & \iff & 2x+y & \le & 350 \\
\text{G:} & x+y & \le & 200 & & & & \\
\text{nemneg:} & x,y & \ge & 0 & & & &
\end{array}$$

A fenti feltételeket kielégítő (x,y) párok közt kell keresnünk olyat, ami maximalizálja a $10x+12y$ célfüggvényt (bevétel). Ábrázoljuk a síkon a feltételeket kielégítő pontok halmazát. Minden egyenlőtlenség egy félsíkot határoz meg, melyet egy egyenes határol (ahol az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül). A félsíkok P-vel jelölt metszete (egy konvex sokszög (poligon)) lesz a megengedett (x,y) párok halmaza (bár az is előfordulhatna, hogy egy végtelen tartományt kapunk). Számoljuk ki a határoló egyenesek páronkénti metszéspontjait (két egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris rendszereket kell megoldani).

	$x=0$	$y=0$	$x+2y=300$	$2x+y=350$	$x+y=200$
$x=0$	–	$(0,0)$	$(0,150)$	$(0,350)$	$(0,200)$
$y=0$		–	$(300,0)$	$(175,0)$	$(200,0)$
$x+2y=300$			–	$(83\frac{1}{3},133\frac{1}{3})$	$(100,100)$
$2x+y=350$				–	$(150,50)$
$x+y=200$					–

A P csúcsai ezek közül pontosan azok, melyek P-ben vannak, azaz teljesítik a többi feltételt is. A nemnegativitással sehol sincs probléma, de néhány metszéspont a jelölt feltétel alapján P-n kívül található, pl $(83\frac{1}{3},133\frac{1}{3})$ megsérti a G: $x+y\le 200$ feltételt. A bent maradó 5 pont a P csúcsai:

	$x=0$	$y=0$	$x+2y=300$	$2x+y=350$	$x+y=200$
$x=0$	–	$(0,0)$	$(0,150)$	$\neg$SZ	$\neg$SZ
$y=0$		–	$\neg$V	$(175,0)$	$\neg$V
$x+2y=300$			–	$\neg$G	$(100,100)$
$2x+y=350$				–	$(150,50)$
$x+y=200$					–

(Egyébként egy kellően pontos ábráról akár le is lehet olvasni, hogy mely egyenesek metszéspontjai lesznek a csúcsok, így elég lenne csak azokat kiszámolni; ugyanakkor ez a kvázi közelítő módszer csak akkor ad hitelt érdemlő eredményt, ha a fölmerülő pontatlanságok természetét és mértékét helyesen vesszük figyelembe.)
Mivel a célfüggvény maximális értéke az a legnagyobb p paraméter, melyre a $10x+12y=p$ egyenesnek van pontja P-ben, a p maximális értékére ez az egyenes támasztja P-t (egy csúcsában vagy egy élében metszi, de nem lehet rajta P-nek belső pontja), így tartalmazza valamelyik csúcsot. Számoljuk ki a célfüggvény értékét a csúcsokon:

	$(0,0)$	$(0,150)$	$(100,100)$	$(150,50)$	$(175,0)$
$10x+12y$	0	1800	2200	2100	1750

Ez alapján Kisvakondék a maximális, 2200 petákos heti bevételt 100 vakondnadrág és 100 nyúlnadrág készítésével tudják elérni.

2. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális, illetve maximális ára, amely mellett az előző feladatnál kapott előállítási mennyiségek mellett továbbra is maximális bevételt kapunk?
b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha...
(i) ... 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
(ii) ... 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
(iii) ... 130 vakondnadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
(iv) ... 90 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 110 nyulnadrágot?

Megoldás: **a)** Geometriai interpretációval vizsgálva: ha a nyúlnadrágok új ára s, akkor a $(100,100)$ pont akkor lesz továbbra is optimális, ha alkalmas p-re a P tartomány $10x+sy=p$ egyenletű támaszegyenese tartalmazza a $(100,100)$ pontot. Ez akkor fordul elő, ha a $10x+sy=p$ egyenes meredeksége[1] (azaz $-s/10$) a $(100,100)$ csúcsot kimetsző két

[1]Egy nem függőleges egyenes egyenlete szokásosan $y=mx+b$ alakú, ahol m az egyenes meredeksége.

feltétel (SZ: $x+2y \leq 300$ és G: $x+y \leq 200$) határegyeneseinek meredekségei (azaz $-\frac{1}{2}$ és -1) közé esik, magyarán $-1 \leq -10/s \leq -\frac{1}{2}$, átrendezve ($-2s$-sel szorozva) $2s \geq 20 \geq s$, tehát $10 \leq s \leq 20$.

A meredekség fogalmát kikerülve úgy is meggondolhatjuk ugyanezt, hogy a célfüggvénynek megfelelő támaszegyenes normálvektora (ami $(10,s)$) a $(100,100)$ pontot kimetsző két egyenes normálvektora közé esik; ezek a normálvektorok $n_{SZ} = (1,2)$, $n_G = (1,1)$. Mivel a normálvektorok skalárral szorozhatók, normálás után azt látjuk, hogy a $(10,s)$ normálvektor a $(10,10)$ és a $(10,20)$ irányú félegyenesek közti tartományba kell essen, azaz $10 \leq s \leq 20$ kell legyen. (Figyeljünk oda, hogy a szóba kerülő normálvektorok egységesen a P-t nem tartalmazó irányba álljanak.)

Közvetlenül is kiszámolhatjuk ugyanezt: a $(100,100)$ pont akkor jelent maximális bevételt s petákos nyúlnadrágár mellett, ha a $10x+sy$ bevétel az $(x,y) = (100,100)$ csúcsra legalább akkora, mint minden más csúcsra. Számoljuk ki a bevételeket:

	$(0,0)$	$(0,150)$	$(100,100)$	$(150,50)$	$(175,0)$
$10x+sy$	0	$150s$	$1000+100s$	$1500+50s$	1750

Felírva a $1000+100s \geq 0$, $1000+100s \geq 150s$, $1000+100s \geq 1500+50s$, $1000+100s \geq 1750$ egyenlőtlenségeket, átrendezve és összefoglalva $10 \leq s \leq 20$ adódik.

b) A kérdés azzal egyenértékű, hogy az adott (x,y) pont rajta lehet-e a P valamely támaszegyenesén, azaz csúcsa-e P-nek, esetleg valamelyik oldalélének belső pontja. A válaszok rendre: igen (csúcs); nem (P belső pontja, mert minden egyenlőtlenséget szigorú egyenlőtlenséggel teljesít, tehát nincs P határán; máshogyan: a $(120,80)$ pont is P-ben van, és $110 \cdot 10 + 80s < 120 \cdot 10 + 80s$, tehát a $(110,80)$ pontban a célfüggvény értéke semmilyen s-re nem maximális); igen (bár nem csúcs, de rajta van az $x+y=200$ oldalegyenesen a $(100,100)$ és a $(150,50)$ csúcsok közti szakaszon (tehát P élén)); nem (nincs P-ben, mert megsérti a SZ: $x+2y \leq 300$ feltételt).

3. Egy kávépörkölő üzemben alap és prémium minőségű szemes kávét állítanak elő egyféle robusta és kétfajta arabica alapanyag fölhasználásával. A titkos receptúra jobbra látható.

		alap	prémium
Hozzávalók aránya	robusta	50%	–
	arabica 1	30%	40%
	arabica 2	20%	60%
	Pörkölési sebesség	1 q/ó	4 q/ó

Három feltétel szab korlátot a termelésnek: a pörkölő maximális üzemideje 18 óra hetente, a csomagolóüzem kapacitása maximum 24 mázsa hetente, és a beszállítónk a második arabica alapanyagból legfeljebb 12 mázsát vállal hetente.

a) Hány mázsa alap, illetve prémium minőségű kávét állítsunk elő a haszon maximalizálása érdekében, ha az alap kávén 20.000, a prémium kávén 30.000. forint hasznunk van mázsánként?

b) A rendelkezésünkre álló forrásokból az üzem kapacitásának bővítését tervezzük. Mibe fektessünk be: a pörkölő üzemidejének növelésébe, vagy a csomagolóüzem kapacitásának bővítésébe?

Megoldás: **a)** A feladat megoldásának menete ugyanaz, mint a Kisvakond nadrágüzleténél. Először a változókat és az adódó feltételeket kell meghatározni. Legyen x és y a két változó, melyek az előállítandó alap és prémium kávé mennyiségét jelöljék (mázsa/hét mértékegységben). Természetesen $x \geq 0$ és $y \geq 0$. A pörkölő heti maximális üzemidejéből az $x+y/4 \leq 18$, ekvivalensen $4x+y \leq 72$ adódik, míg a csomagolóüzem kapacitásából $x+y \leq 24$. A hozzávalók esetében csak az arabica 2 beszállítható mennyiségében maximuma jelent korlátot; a receptúra alapján hetente $0,2x+0,6y$ mázsára lesz szükségünk ebből az alapanyagból, ez a mennyiség tehát legfeljebb 12 lehet;felszorozva öttel a $x+3y \leq 60$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ezek alapján a megengedett (x,y) párok által alkotott sokszögtartomány csúcsai (a számolások részleteit mellőzve) $(0,0)$, $(0,20)$, $(6,18)$, $(16,8)$ és $(18,0)$. A cél ezen a tartományon a $20000x+30000y$, ekvivalensen a $2x+3y$ célfüggvény maximalizálása. Ennek értéke a $(6,18)$ csúcsban maximális, tehát hetente 6 mázsa alap és 18 mázsa prémium kávét érdemes előállítani (és ekkor a haszon hetente 660000).

b) Az optimumot adó csúcs az arabica 2 alapanyag mennyiségéből és a csomagolóüzem kapacitásából adódó egyenesek metszéspontja. Geometriailag a kapacitásnövelés a megfelelő egyenesek párhuzamos jobbra tolásának felel meg, tehát a sokszögtartományunk nőni fog, de oldaléleinek meredeksége nem változik. Könnyen látható, hogy a pörkölőüzem kapacitásának bővítése nem változtatja meg azt, hogy a célfüggvénynek megfelelő meredekségű támaszegyenes hol érinti a sokszögtartományunkat, ellenben a csomagolóüzem kapacitásának bővítése odébb mozdítja azt, így a hasznunk is növelhető.

4. Írjunk föl olyan lineáris programot, ami **a)** nem oldható meg; **b)** megoldható, de a célfüggvénye nem korlátos fölülről; **c)** megoldható, és a célfüggvénye korlátos fölülről.

5. Adott egy élsúlyozott teljes páros gráf, a csúcsosztályai $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, az $a_i b_j$ él súlya w_{ij}. Írjunk föl olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.

Megoldás: Minden a_i csúcshoz vegyünk föl egy x_i, és minden b_j csúcshoz egy y_j változót, ezek tárolják a csúcsok súlyait a súlyozott lefogásban. A lineáris programunk:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i, \text{ ha}$$
$$\forall i \in \{1,2\dots,n\}: x_i \geq 0$$
$$\forall i \in \{1,2\dots,n\}: y_i \geq 0$$
$$\forall i,j \in \{1,2\dots,n\}: x_i + y_j \geq w_{i,j}$$

6. Egy gyárban n-féle terméket gyártanak k-féle alapanyag felhasználásával. Az i-edik termékhez a j-edik alapanyagból szükséges mennyiséget jelölje $a_{i,j}$, az j-edik alapanyag egységárát s_j, a j-edik alapanyagból hetente maximum h_j mennyiséget tudunk beszerezni. Az i-edik termékből egy egység előállításának munkadíja t_i, és a termék iránti heti maximális vásárlói igény v_i (ennyit várhatóan el lehet adni, többet nem). Az i-edik terméket a gyártó d_i áron tudja értékesíteni. Írjunk fel olyan lineáris programot a hetente előállítandó termékmennyiségekre, mely maximalizálja a gyár profitját.

Megoldás: Vezessünk be változókat: jelölje x_i azt, hogy az i-edik termékből hetente mennyit állítunk elő. A j-edik alapanyagból beszerzendő mennyiség nem lehet több a heti limitnél, tehát

$$\forall j \in \{1,\dots,k\}\text{-ra } \sum_{i=1}^{k} x_i a_{i,j} \leq h_j.$$

Egyik termékből sem állíthatunk elő negatív mennyiséget, de a heti vásárlói kapacitásnál többet sem érdemes, ezért

$$\forall i \in \{1,\dots n\}: x_i \geq 0, \text{ és } x_i \leq v_i.$$

A gyár profitja az eladási árakból adódik, de persze le kell vonni az alapanyagok költségét, és az előállítási költségeket is. Ezeket összegezve az i-edik termék egy egységnyi mennyiségére jutó profit éppen

$$c_i = d_i - \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} s_j - t_i,$$

tehát az összesített profit $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, ezt a célfüggvényt kell maximalizálni.

7. a) Mi a duálisa a jobbra látható lineáris programozási feladatnak?
b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}$
ha
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$
$x_2 + 2x_4 \leq 6$
$x_1 + x_3 + x_4 \leq 7$
$2x_2 + 3x_4 \leq 8$

Megoldás: **a)** Szerencsére sztenderd $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$ alakban van az LP megadva, nem kell kínlódni az ilyen alakra hozással. Készítsünk szamárvezetőt, azaz egy roppant hasznos ábrát az adatokkal! Az x_i változók az oszlopoknak felelnek meg, a b koordinátáit a soroktól jobbra írjuk, a célfüggvényt az x változókkal szembe, alulra.

$$\begin{array}{r|cccc|l}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \leq 5 \\
y_2 \geq 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \leq 6 \\
y_3 \geq 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \leq 7 \\
y_4 \geq 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & \leq 8 \\
\hline
 & = & = & = & = & \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 &
\end{array}$$

A tanultak alapján a duális a $\min\{yb\colon yA = c\}$ lineáris program. Mivel az y változókkal balról szorzunk, azok a soroknak felelnek meg, tehát az ábrán a soroktól balra tesszük őket. Jobbra látható a duális

$\min\{5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4\}$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \geq 0$
$y_1 + y_3 = 2$
$2y_1 + y_2 + 2y_4 = -3$
$y_1 + y_3 = 4$
$2y_2 + y_3 + 3y_4 = 5$

b) Könnyen beláthatjuk, hogy az LP-nek van megoldása, pl $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ megfelelő. A dualitástétel szerint primál célfüggvény pontosan akkor korlátos a megoldások halmazán, ha a DLP megoldható. Márpedig az első és a harmadik duálfeltétel ellentmond egymásnak. Ezért a DLP-nek nincs megoldása, vagyis abban az esetben vagyunk, amikor az LP megoldható, de a DLP nem, tehát az LP célfüggvényérték nem korlátos.

8. a) Mi a duálisa a jobbra látható LP feladatnak?
b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}$
ha
$x_1 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$
$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 \leq 2$

9. a) Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az ($x \geq 0$, $Ax \leq b$) és az ($y \geq 0$, $yA \geq 0$, $yb < 0$) lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg.
b) Igazoljuk ugyanezt az ($x \geq 0$, $Ax = b$) és az ($yA \geq 0$, $yb < 0$) rendszerekre is.

10. Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor nem oldható meg, ha az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix soraiból elő lehet állítani tilos sort (azaz $(0, 0, \ldots, 0|p)$ alakú sort, ahol $p \neq 0$). Ezt egyébként már tanultuk a Gauss-eliminációnál is.