Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

7. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Farkas-lemma: $\exists x: Ax \le b \iff \nexists y \ge 0 : yA = 0, yb < 0$. Más szóval: az $Ax \le b$ és az $y \ge 0, yA = 0, yb < 0$ lineáris rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása.

Definíció: *Lineáris program* (LP) alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett. Persze az összes feltétel megfogalmazható csak $\le$ típusú egyenlőtlenségek használatával.

Geometriai interpretáció két változó esetén. Egy $ax+by = c$ egyenlet (x,y) megoldásai a síkon egy ((a,b) normálvektorú) egyenest alkotnak. Egy $ax+by \le c$ egyenlőtlenség (x,y) megoldásai a síkon az előző egyenes által határolt, zárt félsíkot alkotnak. Néhány egyenlőtlenség közös megoldásai az egyenlőtlenségekhez tartozó félsíkok metszetében levő (x,y) pontok halmaza, ami egy konvex poliéder (ami lehet üres, ha nincs megoldás; és esetleg előfordulhat az is, hogy nem korlátos (végtelenül nagy)). Tegyük föl, hogy egy kétváltozós egyenlőtlenségrendszer olyan (x,y) megoldását keressük, ahol c_1x+c_2y maximális. Azaz, ha P jelöli az egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló poliédert, akkor olyan $(x,y) \in P$ pontot keresünk, amelyre a lehető legnagyobb a c_1x+c_2y összeg. Azok az (x,y) pontok a síkon, amelyekre a $c_1x+c_2y = p$ valamilyen konstans $p \in \mathbb{R}$-re, egy e egyenest alkotnak. Ráadásul, ha p értékét növeljük / csökkentjük, akkor az egyenes a (c_1,c_2) normálvektor irányában / ellenkező irányban megy át egy párhuzamos egyenesbe). Ha tehát a P konvex sokszögnek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a normálvektor által mutatott irány szerinti „végtelen távolból” indítva addig kell tolni a P sokszög felé, amíg az eltoltnak közös pontja nem lesz P-vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük P-nek azt az e-vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a (c_1,c_2) normálvektor irányába már nem esik P-nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló megoldásai az egyenes ezen eltoltjának és P-nek a közös pontjai lesznek. Ezen optimális megoldások halmaza vagy egy csúcsa, vagy egy éle lesz P-nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. Az optimum meghatározása innentől egyszerű: P minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs fog maximalizálni, amelyikre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás.

Lineáris program sztenderd mátrixos alakja. Az $x_1,\dots,x_n = x$ változókkal felírt minden lineáris egyenlet, egyenlőtlenség, nemnegativitási feltétel átírható $\le$ egyenlőtlenségek segítségével, és így $Ax \le b$ alakba. Lineáris program: a cx célfüggvény értékét akarjuk maximalizálni az $Ax \le b$ feltételt teljesítő x-eken, azaz a feladat $\max\{cx\colon Ax \le b\}$. A feladatot vizsgálva két alternatív párt írhatunk föl a Farkas-lemma alapján:

$$\textbf{(I)}\ \ Ax \le b \leftrightsquigarrow \textbf{(II)}\ \ y \ge 0, yA = 0, yb < 0$$
$$\textbf{(A)}\ \ Ax \ge 0, cx < 0 \leftrightsquigarrow \textbf{(B)}\ \ y \ge 0, yA = c$$

Mindkét párnak pontosan az egyik tagja oldható meg. Az (I) megoldhatósága az $Ax \le b$ feltételek kielégíthetőségét jelenti, az (A) megoldhatósága pedig a cx célfüggvény korlátlan növelhetőségét. Tehát a $\max\{cx\colon Ax \le b\}$ LP megoldható és a célfüggvénye korlátos fölülről $\iff$ az (I) és a (B) rendszereknek van megoldása.

Duális lineáris program, DLP: a $\max\{cx\colon Ax \le b\}$ (primál) LP *duálisa* a $\min\{yb\colon y \ge 0, yA = c\}$ LP.

A (B) megoldhatósága a DLP megoldhatóságát jelenti, míg a (II) megoldhatósága a DLP célfüggvényének korlátlan csökkenthetőségét.

Ha (I) és (B) megoldhatók, azaz mind az LP-nek, mind a DLP-nek van megoldása (legyen egy-egy ilyen x_0 és y_0), akkor ezekre a megoldásokra a célfüggvényértékek $cx_0 = (y_0A)x_0 = y_0(Ax_0) \le y_0b$, tehát az LP és a DLP megoldásaihoz tartozó célfüggvényértékek egymást korlátozzák. Az optimális megoldásokra vonatkoztatva kapjuk, hogy $\max\{cx\colon Ax \le b\} \le \min\{yb\colon y \ge 0, yB = c\}$. Később látni fogjuk, hogy itt valójában mindig egyenlőség teljesül.

Gyakorlatok

1. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért, a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

2. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális, illetve maximális ára, amely mellett az előző feladatnál kapott előállítási mennyiségek mellett továbbra is maximális bevételt kapunk?
b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha...

(i) ...175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
(ii) ...110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
(iii) ...130 vakondnadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
(iv) ...90 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 110 nyulnadrágot?

3. Egy kávépörkölő üzemben alap és prémium minőségű szemes kávét állítanak elő egyféle robusta és kétfajta arabica alapanyag fölhasználásával. A titkos receptúra jobbra látható.

		alap	prémium
Hozzávalók aránya	robusta	50%	–
	arabica 1	30%	40%
	arabica 2	20%	60%
	Pörkölési sebesség	1 q/ó	4 q/ó

Három feltétel szab korlátot a termelésnek: a pörkölő maximális üzemideje 18 óra hetente, a csomagolóüzem kapacitása maximum 24 mázsa hetente, és a beszállítónk a második arabica alapanyagból legfeljebb 12 mázsát vállal hetente.
a) Hány mázsa alap, illetve prémium minőségű kávét állítsunk elő a haszon maximalizálása érdekében, ha az alap kávén 20.000, a prémium kávén 30.000. forint hasznunk van mázsánként?
b) A rendelkezésünkre álló forrásokból az üzem kapacitásának bővítését tervezzük. Mibe fektessünk be: a pörkölő üzemidejének növelésébe, vagy a csomagolóüzem kapacitásának bővítésébe?

4. Írjunk föl olyan lineáris programot, ami **a)** nem oldható meg; **b)** megoldható, de a célfüggvénye nem korlátos fölülről; **c)** megoldható, és a célfüggvénye korlátos fölülről.

5. Adott egy élsúlyozott teljes páros gráf, a csúcsosztályai $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, az a_ib_j él súlya w_{ij}. Írjunk föl olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.

6. Egy gyárban n-féle terméket gyártanak k-féle alapanyag felhasználásával. Az i-edik termékhez a j-edik alapanyagból szükséges mennyiséget jelölje $a_{i,j}$, az j-edik alapanyag egységárát s_j, a j-edik alapanyagból hetente maximum h_j mennyiséget tudunk beszerezni. Az i-edik termékből egy egység előállításának munkadíja t_i, és a termék iránti heti maximális vásárlói igény v_i (ennyit várhatóan el lehet adni, többet nem). Az i-edik terméket a gyártó d_i áron tudja értékesíteni. Írjunk fel olyan lineáris programot a hetente előállítandó termékmennyiségekre, mely maximalizálja a gyár profitját.

7. a) Mi a duálisa a jobbra látható lineáris programozási feladatnak?
b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$\max\{2x_1+3x_2+4x_3+5x_4\}$
ha
$x_1+2x_2+x_3\le 5$
$x_2+2x_4\le 6$
$x_1+x_3+x_4\le 7$
$2x_2+3x_4\le 8$

8. a) Mi a duálisa a jobbra látható LP feladatnak?
b) Mutassuk meg, hogy az $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1=4$, $y_2=2$, $y_3=3$, $y_4=0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$\max\{17x_1+17x_2+17x_3\}$
ha
$x_1\ge 0$
$x_1+2x_2+3x_3\le 1$
$2x_1+3x_2+x_3\le 3$
$3x_1+x_2+x_3\le 8$
$2x_1+5x_2\le 2$

9. a) Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az $(x\ge 0,\ Ax\le b)$ és az $(y\ge 0,\ yA\ge 0,\ yb<0)$ lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg.
b) Igazoljuk ugyanezt az $(x\ge 0,\ Ax=b)$ és az $(yA\ge 0,\ yb<0)$ rendszerekre is.

10. Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor nem oldható meg, ha az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix soraiból elő lehet állítani tilos sort (azaz $(0,0,\dots,0|p)$ alakú sort, ahol $p\ne 0$). Ezt egyébként már tanultuk a Gauss-eliminációnál is.