Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

6. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Megfigyelés. Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x2 + \ldots + a_{i,n}x_n \leq b_i$ kanonikus alakba hozható ($1 \leq i \leq k$, $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$) úgy, hogy az esetleges egyenlőségeket két egyenlőtlenségként írjuk fel, a fordított ($\geq$) egyenlőtlenségek helyett pedig a (-1)-szeresük szerepel $\leq$ relációval. A rendszer együtthatómátrixa és jobb oldala a jobbra látható A mátrix és b oszlopvektor, a kibővített együtthatómátrixa $(A|\underline{b})$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix}}_{A} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Fourier-Motzkin-elimináció A Gauss-eliminációhoz hasonló elemi sorekvivalens átalakításokat végzünk (sorcsere, sor λ-val végigszorzása, egy sornak a másikhoz hozzáadása), de itt csak $\lambda > 0$ lehet, ezért egy-egy változó eliminációja bonyolultabb, mint a Gauss-elimináció esetén. Itt is egymás után elimináljuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat (mondjuk ebben a sorrendben), azaz olyan egyenlőtlenségrendszerre térünk át, amelyikben az éppen eliminált változó már nem szerepel. Az x_i eliminációját az alábbiak szerint végezzük.

A kibővített együtthatómátrix sorait alkalmas pozitív konstansokkal szorozva elérjük, hogy az x_i oszlopában minden elem ± 1 vagy 0 legyen. Sorcserékkel a mátrixot a jobbra látható alakba írjuk, ahol az x_i oszlopában A_+, A_- ill. A_0 tartalmazza rendre az 1, -1, ill. 0 elemeket.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & b_+ \\ A_- & b_- \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$$

Az x_i-t $+1$, ill. -1 együtthatóval tartalmazó sorok átrendezve $x_i \leq a$ alakú fölső, ill. $x_i \geq b$ (azaz $-x_i \leq -b$) alakú alsó korlátok x_i-re (ahol a és b függ a többi (még nem eliminált) változótól). Egy ilyen $b \leq x_i \leq a$ rendszerben pontosan akkor adható megfelelő érték x_i-nek, ha $b \leq a$, azaz $0 \leq a - b$, és ez minden $+1$-es és -1-es sorból kapott korlátpárra teljesül. Az elimináció során tehát minden ilyen sorpárból képezzük a sorok összegét, és ezeket az új sorokat tesszük az új rendszerbe.

Az x_i eliminációja után tehát az $A' = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ mátrixot kapjuk, ahol A^*-ba gyűjtjük az összes lehetséges A_+ ill. A_--beli sorpár összegét, b^* pedig a b_+ és b_- megfelelő koordinátáinak összege. Ha A_+ vagy A_- üres volna, ne ijedjünk meg: ilyenkor A^* is üres (ilyen esetben pl csak fölső korlátaink vannak x_i-re, azaz kellően kis értéket adva x_i-nek nem foghatunk mellé). Az elimináció utáni mátrixban tehát x_i oszlopában csak 0 együtthatók állnak. Az FM-elimináció során a változókat egymás után elimináljuk. Két eset fordulhat elő:

I. eset. Az eliminálás során tilos sor keletkezik, azaz olyan csupa 0 sora A-nak, amelyhez a b konstans negatív. Ekkor nincs megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

II. eset. Nem keletkezik tilos sor. Ekkor fordított $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ sorrendben értéket adunk az egyes változóknak. Az x_i-nek történő értékadáskor csak az x_i eliminációjakor elhagyott soroknak megfelelő egyenlőtlenségekre kell figyelni: ezek adnak az x_i-re egymásnak nem ellentmondó alsó és felső korlátokat. Ilyenkor tehát van megoldás, és konstruálhatunk is egyet.

Megfigyelés. A Fourier–Motzkin-elimináció során kapott minden egyes egyenlőtlenség az eredeti rendszer egyenlőtlenségeinek alkalmas nemnegatív többszöröseinek összege, azaz az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix sorainak nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja. Ez pontosan annak felel meg, hogy egy csupa nemnegatív koordinátákból álló y sorvektorral balról szorozzuk az $(A|b)$ mátrixot; az i. sor együtthatója az y i. koordinátája. Tehát az elimináció során pontosan akkor kapunk tilos sort, ha van olyan nemnegatív koordinátákból álló y sorvektor, melyre $yA = 0$ és $yb < 0$.

Gyakorlatok

1. Oldjuk meg Fourier–Motzkin-elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor állítsuk elő a tilos sort az eredeti egyenlőtlenségekből.

a)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq p \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor mutassunk olyan y vektort, ami előállítja a tilos sort.

a) $$\begin{aligned} 7x_1+5x_2+3x_3 &\le 2 \\ 2x_1+5x_2-6x_4 &\ge -3 \\ 3x_1+x_3 &\ge 4 \\ 2x_1-3x_4 &\le 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 8x_1+5x_2+3x_3 &\le 2 \\ 2x_1+5x_2-6x_4 &\ge -3 \\ 3x_1+x_3 &\ge 4 \\ 2x_1-3x_4 &\le 3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1-5x_2-3x_3+2x_4 &\ge -2 \\ x_1+2x_3-8x_4 &= 5 \\ x_1-2x_2-4x_4 &\le 2 \end{aligned}$$

3. Egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek hogyan lehet a Fourier-Motzkin-eliminációval meghatározni egy olyan megoldását, amelyikben az x_n változó értéke minimális? És olyat, amelyikben az x_1 változó értéke maximális?

4. Adjunk olyan módszert, aminek a segítségével az $x_1,\ldots,x_n$ változókkal felírt tetszőleges lineáris egyenlőtlenség-rendszerhez található olyan megoldás, amire $c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ minimális (ahol $c_1,\ldots c_n \in \mathbb{R}$ konstansok).

5. Adjunk meg olyan módszert, ami tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszerhez az $x_1,\ldots,x_n$ változóknak olyan értékadását találja meg, amire a legjobban sérülő egyenlőtlenség a lehető legkevésbé sérül. Más szóval: találjuk meg az egyenlőtlenségrendszernek egy megoldását, ha van, ha pedig nincs, akkor úgy válasszunk értéket a változóknak, hogy az $a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\ldots a_{i,n}x_n-b_i$ mennyiségek közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

6. Az oldalt látható (G,s,t,c) hálózaton szeretnénk maximális folyamot keresni. Hogyan lehetne ezt a Fourier–Motzkin-elimináció segítségével megtenni? (Aki nagyon elszánt, érdekességképpen megpróbálhatja ténylegesen megoldani ilymódon a feladatot.)