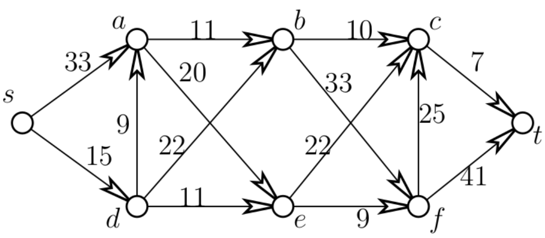
Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

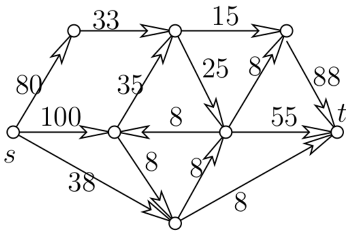
5. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

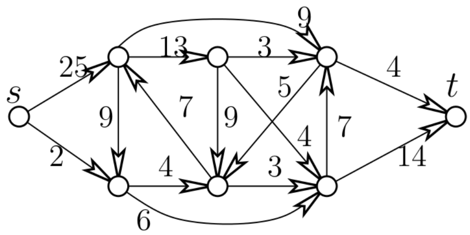
Tudnivalók

Definíció: A *hálózat* egy (G,s,t,c) négyes, ahol $G=(V,E)$ egy irányított gráf, $c:E\to\mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s,t\in V$ a G különböző csúcsai, ún. *termináljai* (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f:E\to\mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0\le f(e)\le c(e)$ minden $e\in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E} f(uv)=\sum_{vu\in E} f(vu)$ tetszőleges $v\in V\setminus\{s,t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-szabály*, esetleg *csomóponti törvény*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su\in E} f(su)-\sum_{us\in E} f(us)$.
Definíció: *(st)-vágás*: a fenti hálózatban olyan $X\subset V$ csúcshalmaz, melyre $s\in X\not\ni t$. Az X vágás kapacitása $c(X):=\sum_{u\in X,v\in V\setminus X} c(uv)$, magyarán az X-ből $V\setminus X$-be futó (azaz X-ből kilépő) élek összkapacitása.
Állítás: Ha (G,s,t,c) egy hálózat, f egy folyam és $s\in X\subseteq V\setminus\{t\}$ egy st-vágás, akkor $m_f=\sum_{uv\in E(G):u\in X,v\notin X} f(uv)-\sum_{uv\in E(G):u\notin X,v\in X} f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. Az utóbbi mindig legfeljebb $c(X)$, és pontosan akkor egyenlő $c(X)$-szel, ha $f(uv)=c(uv)$ minden X-ből kilépő uv élen, és $f(uv)=0$ minden X-be belépő uv élen. **Köv.:** Ha f folyam és X st-vágást indukál, akkor $m_f\le c(X)$.
Állítás: Ha a (G,s,t,c) hálózatban egy f st-folyam és egy $s\in X\not\ni t$ vágás esetén $m_f=c(X)$ teljesül, akkor f maximális nagyságú st-folyam, továbbá X minimális kapacitású st-vágást indukál.
Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban $\max m_f=\min c(X)$, azaz a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális vágáskapacitással.
Definíció: Ha (G,s,t,c) egy hálózat, f pedig egy folyam, akkor a $G_f=(V(G),E_f)$ az f-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv\in E_f$ ha $uv\in E(G)$ és $f(uv)<c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu\in E(G)$ és $f(vu)>0$ (*visszaél*). Az f folyamhoz egy *javító út* a G_f segédgráf egy s-ből t-be vezető irányított útja.
Növelés javító úttal: Ha találunk egy f folyamhoz tartozó G_f segédgráfban st utat (javító utat), akkor f növelhető: a javító út mentén (ami G-ben nem feltétlen irányított út) az előreéleken ε-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken ε-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága ε-nal nő.
Javító utas algoritmus: Kiindulunk egy f folyamból (például $f\equiv 0$), és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs javító út, akkor a folyam maximális. Ezt igazolja, hogy segédgráfban az s-ből elérhető csúcsok X halmaza ekkor minimális st-vágást indukál.

Gyakorlatok



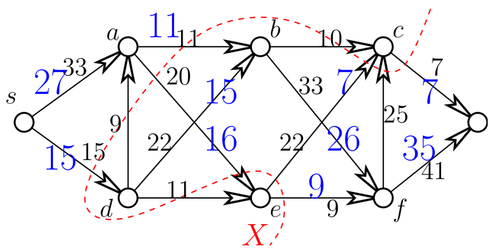




1. a) Mutassunk a fenti, bal oldali ábrán látható (G,s,t,c) hálózatban egy maximális st-folyamot (és igazoljuk is a maximalitását). **b)** Találjunk a fenti, középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást, és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás.

Megoldás: **a)** Egyszerre keresünk maximális nagyságú folyamot és minimális kapacitású vágást az órán tanult Ford-Fulkerson (javító utas) algoritmus segítségével.

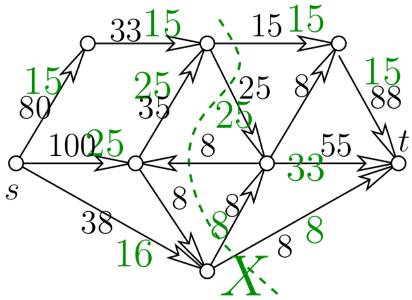
Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f=0$.) **(4 pont)**
(Egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (7), $sdeft$ (9), $sdbft$ (6) $sabft$ (4), $saedbft$ (9), $saecbft$ (7) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll.) **(0 pont)**



A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok $X=\{s,a,e,c\}$ halmaza (az ábrán szaggatott vonal jelzi) által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású, hiszen az X-ből kilépő élek kapacitásainak összege $c(sd)+c(ab)+c(ef)+c(ct)=15+11+9+7=42$. **(4 pont)**
Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 42; és a hálózatban létezik 42 kapacitású st-vágás, tehát tetszőleges st-folyam nagysága legfeljebb 42. Tehát a talált folyam maximális nagyságú, a talált vágás minimális kapacitású. **(2 pont)**

(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágást, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

b) Az előzővel megegyező módon haladva és érvelve, az ábrán látható 56 nagyságú folyam maximális nagyságú, és a szaggatott vonallal jelölt 56 kapacitású (5 csúcsú X halmaz által indukált) vágás minimális kapacitású.



2. A sithek Sötét Testvérisége a fenti, jobb oldalon látható gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni.

Megoldás: A feladat megfogalmazható úgy is, hogy ha a megadott gráfban az élekre írt számokat az adott kapacitásnak értelmezzük, akkor minimális kapacitású st-vágást kell találnunk. **(2 pont)**

Ezért az órán tanult növelő utas módszerrel maximális nagyságú folyamot keresünk, és ennek segítségével találjuk meg a minimális vágást. **(2 pont)**

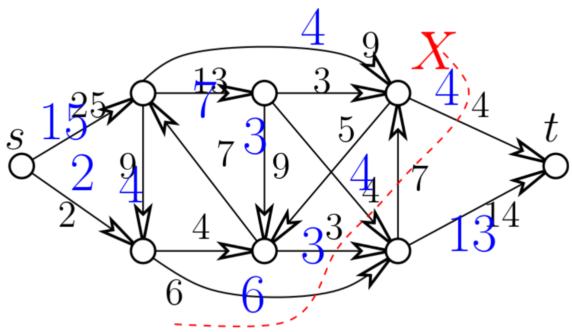
Az ábra egy 17 nagyságú folyamot mutat (a nagyobb, kékkel írt számok jelentik az adott élen a folyamértéket, ha nincs kék szám, akkor ez 0), **(2 pont)**

ezért legalább 17 jedi őrszemre van szükség a támaszpont biztosításához. **(1 pont)**

A szaggatott vonallal jelzett X halmaz egy 17 kapacitású st-vágást indukál, **(1 pont)**

ezért 17 jedi őrszem elég a támaszpont biztosításához. **(1 pont)**

A feladat kérdésére a válasz tehát 17. **(1 pont)**



3. Igaz-e, hogy az alábbi, bal ábrához tartozó (G,s,t,c) hálózatban a maximális folyamnagyság pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)

Megoldás: A maximális folyamnagyság megegyezik a minimális st-vágás kapacitásával. **(3 pont)**

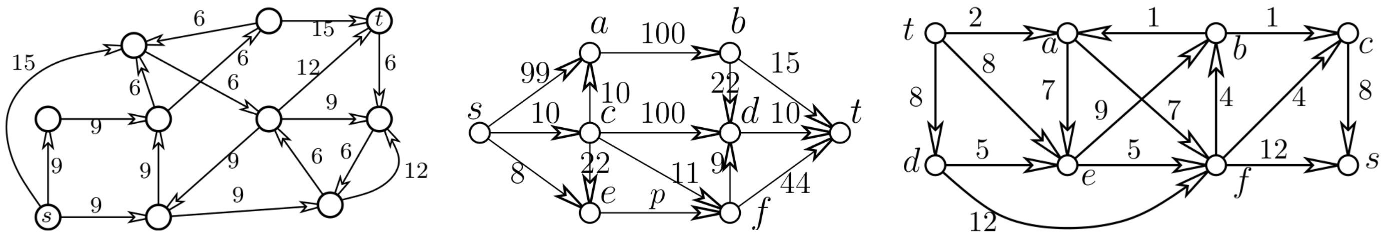
Mivel minden él kapacitása 3-mal osztható, **(2 pont)**

ezért a minden vágáskapacitás, speciálisan a minimális is a 3 többszöröse, **(2 pont)**

tehát a maximális folyamnagyság is 3-mal osztható. **(2 pont)**

A 17-et 3-mal osztva 2 maradékot kapunk, ezért a maximális folyamnagyság nem lehet 17. **(1 pont)**

Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.



4. Határozzuk meg az előző ábrán, a középső hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.

Megoldás: Az $f(sa) = 25$, $f(ab) = 25$, $f(bt) = 15$, $f(bd) = 10$, $f(dt) = 10$, $f(sc) = 10$, $f(cf) = 10$, $f(se) = p$ (tegyük föl, hogy $p \leq 8$), $f(ft) = 10 + p$ egy $35 + p$ nagyságú folyamot bármely $0 \leq p \leq 8$ esetén. Ha pontosan 42 nagyságú folyamot szeretnénk, akkor emiatt $p \leq 7$ kell legyen, és $p = 7$-re ekkora folyamot kapunk.

Az $X = \{s,a,b,d,e\}$ halmaza olyan st-vágást indukál a hálózatban, amelynek kapacitása $c(X) = 35 + p$.

Mivel egy 42 nagyságú st-folyamhoz az szükséges, hogy minden st-vágás kapacitása legalább 42 legyen, ezért ha 42 nagyságú folyamot szeretnénk, akkor $p \geq 7$ szükséges is.

A válasz tehát az, hogy kizárólag $p = 7$ esetén lesz a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. Az előző oldal alján a jobb oldali ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges s-be vezető utat az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre.

Megoldás: Ha a feladathoz tartozó ábra gráfját hálózatként értelmezzük, akkor az a célunk, hogy ebben a hálózatban minimális kapacitású ts-vágást találjunk. (A ts-vágás kapacitását (szemben az st-vágással) a t-t tartalmazó rész felől az s-t tartalmazó rész felé mutató élek összkapacitása adja.)
A minimális ts-vágás meghatározását a hálózat egy maximális folyamának megkeresésével például az órán tanult módon végezhetjük el. Ha jól csináljuk, kapunk egy 17 nagyságú folyamot és egy 17 kapacitású vágást.
A folyam létezése miatt bármely ts-vágás kapacitása legalább 17. Ezek szerint valóban minimális ts-vágást találtunk, így a válasz az, hogy a katasztrófavédelemnek legalább 17 percre van szüksége, és ennyi elég is, ha a megtalált ts-vágás t-től s felé futó éleit zárják le.

Ez egy gonosz feladat: nemcsak azért, mert az s és t szerepe felcserélődött, hanem amiatt is, hogy a folyamnak (ami a vágás minimalitását bizonyítja) nincs szemléletes jelentése, szemben a megszokott modellel, aholis vmi termék áramlik.

6. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s,t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw-folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw-folyam.

Megoldás: Az MFMC-tétel miatt elég megmutatni, hogy minden sw-vágás kapacitása legalább m (hiszen ekkor a minimális sw-vágás kapacitása legalább m, és egy egyenlő a maximális sw folyamnagysággal). Legyen X egy sw-vágás (ekkor $s \in X$, $w \notin X$). Ha $t \notin X$, akkor X egyúttal egy st-vágás is. Mivel létezik m nagyságú st-folyam, minden st-vágás kapacitása legalább m, speciálisan X kapacitása is legalább m. Ha $t \in X$, akkor X egy tw-vágás. Mivel létezik m nagyságú tw-folyam, minden tw-vágás kapacitása, így speciálisan X-é is legalább m.

7. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív ε-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan ε-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas ε-nal növelve, a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él?

8. Rajzoljunk egy hálózatot, amiben valamelyik él kapacitása egy p paraméter. Határozzuk meg ebben a hálózatban p függvényében a maximális folyamnagyságot.

Megoldás: Legyen a max folyamnagyság $p = 0$-ra m_0 és $p = \infty$-re m_∞. Ekkor a max folyamnagyság p-re $m_p = \min\{m_\infty, m_0 + p$ lesz, ugyanis a minvágásban vagy nincs benne a paraméteres él, és akkor m_∞ a kapacitása, vagy benne van, de akkor ez a minvágás $p = 0$-ra is minvágás, tehát a vágás kapacitása $m_0 + p$ lesz.

9*. Legyen s és t egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit s-től t felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás: A könnyebb kommunikálhatóság érdekében forgassuk úgy a kockát, hogy tengelypárhuzamos állásban legyen, és s legyen a bal-fölső-első csúcsa (t pedig a jobb-alsó-hátsó). A függőleges élek kapacitása legyen 2, az s-re és t-re illeszkedő másik ké-két él kapacitása három, a többié egy. Meggyőzhetjük magunkat, hogy minden élnek a kapacitással megegyező folyamértéket adva valóban folyamot kapunk, melynek nagysága 8. Ennél több nem is lehet: ahhoz az s-ből kilépő három élnek 9 összakapacitása kéne legyen (ez az $X = \{s\}$ vágás kapacitása), de akkor a t-be belépő élek összkapacitása legfeljebb $3+2+2 = 7$ (ez az $X = V(G) \setminus \{t\}$ vágás kapacitása), tehát nem kaphatunk nagyobb folyamot. (Egy másik jópofa érv arra, hogy a min vágáskapacitás legfeljebb 8: az s-et tartalmazó három lap három vágás, a kilépő élek rendre a három tengelyirányú élhalmaz. Eme három vágás kapacitását tehát három diszjunkt élhalmaz határozza meg, melyek együtt pont lefedik az összes élt. Mivel az összes él együttes kapacitása $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24$, és ezek a három vágás közt vannak valahogyan szétosztva, így a három vágás közül legalább egynek legfeljebb $24/3 = 8$ lehet a kapacitása.)

10. Tanultuk, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú folyam, amely minden élen egész értéket vesz föl (más szóval *egész(értékű)folyam*). Igaz-e az is, hogy egész kapacitások esetén *minden* maximális folyam egészfolyam?

11*. A folyamokról tanult egészértékűségi lemma segítségével mutassuk meg, hogy ha egy G páros gráfban minden csúcs foka r és $r > 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

Megoldás: A ps gráf éleit lefelé irányítjuk, felül felveszünk egy s termelőt, alul egy t fogyasztót, és a megfelelő csúcsokból irányított éleket a terminálokhoz. Minden élkapacitás 1. Definiáljunk egy folyamot: minden s-ből kilépő és t-be belépő élen a folyamérték legyen 1, a G élein pedig $1/r$. Ez valóban folyam, pl egy fölső csúcsba 1 folyamérték lép be, a kilépő r darab élen pedig $r \cdot \frac{1}{r} = 1$. E folyam nagysága n, a legnagyobb folyam nagysága tehát legalább n (több persze nem is lehet). Az egészértékűségi lemma miatt van tehát n nagyságú egészfolyam; ez minden élen 0 vagy 1 értéket vesz föl, és könnyen látható, hogy az 1 értékű G-beli élek teljes párosítást alkotnak (hiszen pl minden fölső csúcsba belép 1 folyamérték, tehát ki is kell lépjen pontosan egy darab 1 értékű él, alsókra ugyanígy).

12**. Igazoljuk, hogy ha a (G,s,t,c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy folyam, akkor van olyan f' egészfolyam is, amire $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.

13**. Az előző feladat eredményének segítségével mutassuk meg, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

14*. Egy (G,s,t,c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.

Megoldás: Legyen f,g és h egy-egy 10 nagyságú folyam, amely csak a piros-fehér, piros-zöld ill. fehér-zöld éleket használja. Ekkor $\frac{f+g+h}{2}$ megengedett folyam, és nagysága 15. Azt se nehéz látni, hogy bármely st-vágás kapacitása is legalább 15.