# Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

4. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Konvenció:** Tetsz. $f\colon H\to\mathbb{R}$ függvény és $A\subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A)=\sum\{f(a):a\in A\}$.
**Definíció:** Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E\to\mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén a $P$ (teljes) párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(P)\geq\tilde{w}(P')$ teljesül a $G$ tetszőleges $P'$ (teljes) párosítására. (Itt két külön koncepciót nézünk: $P$ vagy bármilyen párosítás lehet, vagy csak teljes párosításokra szorítkozunk.)
**Megfigyelés:** A maximális súlyú párosítás $w\equiv 1$ esetén maximális méretű párosítást jelent.
**Definíció:** Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E\to\mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c\colon V\to\mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e=uv\in E$ élre $w(e)\leq c(u)+c(v)$ teljesül. Az $e$ él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.
**Állítás:** Ha $c:V\to\mathbb{R}_+$ súlyozott lefogás a $w$ súlyfüggvényhez, akkor tetszőleges $P$ párosításra $\tilde{w}(M)=\sum\{w(uv):uv\in P\}\leq\sum\{c(u)+c(v):uv\in P\}\leq\tilde{c}(V)$ teljesül. (Megjegyzés: ha $P$ *teljes* párosítás, akkor a súlyfüggvény nemnegativitására nincs szükség, és az utolsó becslésben mindig egyenlőség áll fenn.)
**Következmény:** (1) Ha $\tilde{w}(P)=\tilde{c}(V)$ teljesül valamely $P$ teljes párosításra és $c$ súlyozott lefogásra, akkor $P$ maximális súlyú teljes párosítás és $c$ minimális összsúlyú súlyozott lefogás.
(2) Ha a $P$ teljes párosítás pontos élekből áll, akkor $\tilde{w}(P)=\tilde{c}(V)$.
**Megjegyzés:** Ha $G$ élsúlyozott (páros) gráfban keresünk maximális súlyú párosítást, akkor megtehetjük a következőt: töröljük ki $G$-ből a negatív súlyú éleket (ha vannak; úgysem kerülnének bele egy max súlyú párosításba), egészítsük ki új csúcsokkal és 0 súlyú élekkel úgy, hogy teljes (páros) gráfot kapjunk, melyben van teljes párosítás. A kapott $G'$ gráfban a max súlyú teljes párosítások lényegében ugyanazok, mint az eredeti $G$ gráf max súlyú párosításai, azaz visszavezettük az eredeti problémát nemnegatív élsúlyú, teljes (páros) gráfok max súlyú teljes párosításaira.
**Egerváry-algoritmus (magyar módszer)** teljes páros gráfban max súlyú teljes párosítás keresésére.
Input: $n\times n$ táblázat (sorok ill. oszlopok a színosztályok, a mezőkbe írt számok az élsúlyok).
Output: súlyozott lefogás és teljes párosítás pontos élekből.
A sorokhoz 0 súlyt rendelünk, az oszlopokhoz pedig az adott oszlopban álló maximumot. A pontos éleken keresünk maximális méretű párosítást alternáló utakkal (ha fedetlen oszlopból fedetlen sorba érünk, az út mentén cserélve növeljük a párosítást, ahányszor lehet). Ha ez teljes párosítás, kész vagyunk. Ha nem, akkor megkeressük a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető sorokat és oszlopokat. Előbbieken növeljük, utóbbiakon csökkentjük a súlyozott lefogást a legnagyobb olyan $\varepsilon$ értékkel, amivel még továbbra is súlyozott lefogást kapunk. Ezáltal a $\tilde{c}(V)$ csökken, és több oszlop lesz alternáló úton elérhető a fedetlen oszlopok halmazából. Innen ismételjük a folyamatot, azaz vagy nagyobb méretű párosítást találunk pontos élekből, vagy tovább csökkentjük a súlyozott lefogás összsúlyát. Előbb-utóbb meglesz a pontos élekből álló teljes párosítás.

**Definíció:** A *hálózat* egy $(G,s,t,c)$ négyes, ahol $G=(V,E)$ egy irányított gráf, $c:E\to\mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s,t\in V$ a $G$ különböző csúcsai, ún. *termináljai* ($s$ a *termelő*, $t$ a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f:E\to\mathbb{R}_+$ egy *(st-)folyam*, ha $0\leq f(e)\leq c(e)$ minden $e\in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E}f(uv)=\sum_{vu\in E}f(vu)$ tetszőleges $v\in V\setminus\{s,t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-szabály*, esetleg *csomóponti törvény*). Az $f$ folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az $f$ folyam *értéke*) az $s$-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $m_f=\sum_{su\in E}f(su)-\sum_{us\in E}f(us)$.
**Definíció:** A fenti hálózat egy *(st-)vágása* olyan $X\subset V$ halmaz, melyre $s\in X\not\ni t$. Az $X$ vágás *kapacitása* $c(X):=\sum_{u\in X,v\in V\setminus X}c(uv)$, magyarán az $X$-ből $V\setminus X$-be futó (azaz $X$-ből kilépő) élek összkapacitása.
**Állítás:** tetszőleges $f$ *st*-folyamra és tetszőleges $X$ *st*-vágásra $m_f\leq c(X)$.

## Gyakorlatok

**1.** A $G$ teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ill. $\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, az $a_ib_j$ él súlya pedig az egyik jobb oldali mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást mindhárom mátrix esetén (és mutassuk meg róluk, hogy maximálisak).

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix}9&11&5&6\\5&6&2&4\\5&8&5&5\\4&8&1&3\end{pmatrix}\quad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix}8&3&5&4\\7&1&6&2\\9&3&4&1\\4&2&7&5\end{pmatrix}\quad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix}2&5&6&3\\0&2&5&1\\5&7&9&6\\1&2&4&1\end{pmatrix}$$

*Megoldás:* Nézzük például az **a)** -t. Az Egerváry-algoritmust alkalmazzuk: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximumok, azaz $9,11,5,6$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik. Az egymást követő ábrákon az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. Ha van javító út, aláhúzássokkal jelöljük, és amentén növeljük a párosítást. Ha nincs, a nyilak a fedetlen (szabad) oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokat és sorokat jelölik (a fedetlen oszlop bármely pontos éléből indulhatunk, és azok a sorok/oszlopok számítanak elértnek, amelyben levő pontos élre rá tudtunk lépni). Előbbieken csökkentjük, utóbbiakon növeljük a lefogás súlyát.

| ↓ | ↓ | | ↓ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | **5** | **6** | 0 | ← |
| 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | 5 | 0 | |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 0 | |
| 9 | 11 | 5 | 6 | | |

| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | 5 | **6** | 1 | ← |
| 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | **5** | 0 | ← |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 0 | |
| 8 | 10 | 5 | 5 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | 5 | **6** | 2 |
| 5 | 6 | 2 | $\underline{\mathbf{4}}$ | 0 |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | **5** | 1 |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 0 |
| 7 | 9 | 4 | 4 | |

| ↓ | ↓ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | 5 | **6** | 2 | ← |
| 5 | 6 | 2 | $\boxed{4}$ | 0 | |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | **5** | 1 | |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 0 | |
| 7 | 9 | 4 | 4 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | 5 | 6 | 3 |
| 5 | 6 | 2 | $\boxed{4}$ | 0 |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | **5** | 1 |
| 4 | $\underline{\mathbf{8}}$ | 1 | 3 | 0 |
| 6 | 8 | 4 | 4 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{9}$ | **11** | 5 | 6 | 3 |
| 5 | 6 | 2 | $\boxed{4}$ | 0 |
| 5 | 8 | $\boxed{5}$ | **5** | 1 |
| 4 | $\boxed{8}$ | 1 | 3 | 0 |
| 6 | 8 | 4 | 4 | |

A kapott párosítás pontos élekből áll, tehát a tanultak alapján maximális súlyú. Ha ez nem volna elég: a párosítás összsúlya 26, a súlyozott lefogásunké szintén. A tanultak szerint minden (teljes) párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint egy tetszőleges súlyozott lefogás összsúlya, ezért nincs nagyobb összsúlyú teljes párosítás, sem kisebb összsúlyú súlyozott lefogás.

Nézzük meg a **b)** -t is, itt minden lépést külön kiírva:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | **3** | 5 | 4 | 0 |
| 7 | 1 | 6 | 2 | 0 |
| **9** | **3** | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | **7** | **5** | 0 |
| 9 | 3 | 7 | 5 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $\boxed{3}$ | 5 | 4 | 0 |
| 7 | 1 | 6 | 2 | 0 |
| $\boxed{9}$ | **3** | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | $\boxed{7}$ | **5** | 0 |
| 9 | 3 | 7 | 5 | |

| | | ↓ | ↓ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | $\boxed{3}$ | 5 | 4 | 0 | |
| 7 | 1 | 6 | 2 | 0 | |
| $\boxed{9}$ | **3** | 4 | 1 | 0 | |
| 4 | 2 | $\boxed{7}$ | **5** | 0 | ← |
| 9 | 3 | 7 | 5 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $\boxed{3}$ | 5 | **4** | 0 |
| 7 | 1 | **6** | 2 | 0 |
| $\boxed{9}$ | **3** | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | $\boxed{7}$ | **5** | 1 |
| 9 | 3 | 6 | 4 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $\boxed{3}$ | 5 | **4** | 0 |
| 7 | 1 | $\underline{\mathbf{6}}$ | 2 | 0 |
| $\boxed{9}$ | **3** | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | $\underline{\boxed{7}}$ | $\underline{\mathbf{5}}$ | 1 |
| 9 | 3 | 6 | 4 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $\boxed{3}$ | 5 | **4** | 0 |
| 7 | 1 | $\boxed{6}$ | 2 | 0 |
| $\boxed{9}$ | **3** | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | **7** | $\boxed{5}$ | 1 |
| 9 | 3 | 6 | 4 | |

Az utolsó lépésben javító utat találtunk (fedetlen oszlopból fedetlen sorba jutottunk alternálva, három mezőt bejárva), e mentén cseréltünk, így kaptuk a teljes párosítást. Ez pontos élekből áll, tehát a tanultak alapján maximális súlyú. A súlya amúgy $9+3+6+5=23$, és a súlyozott lefogásunk összsúlya is $9+3+6+4+0+0+0+1=23$, ami szintén igazolja a párosítás maximalitását és a súlyozott lefogás minimalitását.

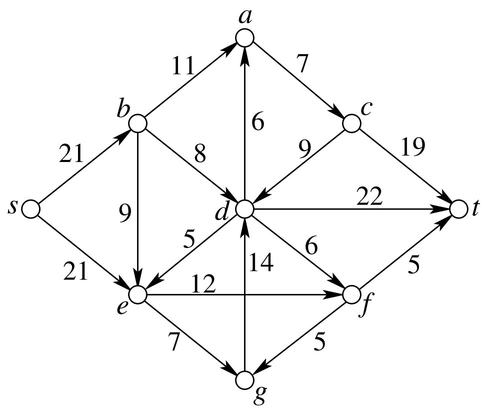
**2.** A jobb oldali mátrix a $G$ páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok, ill. az oszlopok felelnek meg, az $(i,j)$ pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor $X$ áll a mátrixban.) Keressünk $G$-ben maximális súlyú párosítást (és igazoljuk is a maximalitását).

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

*Megoldás:* A tanult visszavezetést alkalmazzuk: egészítsük ki a mátrixok egy csupa 0 sorral, és az X-eket is cseréljük 0-ra. Ekkor az új mátrixban kereshetünk maximális súlyú párosítást pl. a magyar módszerrel, és ennek az eredeti mátrixban értelmezhető elemei maximális súlyú párosítást adnak.

**3.** A $G$ teljes páros gráf színosztályai legyenek $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ill. $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, az $a_ib_j$ él súlya pedig legyen $|i-j^2|$. Adjunk meg $G$-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és igazoljuk is, hogy maximális). (ZH '09.)

**4.** Tekintsük az ábrán látható $(G,s,t,c)$ hálózatot, ahol a $c$ kapacitásfüggvény értékeit az élekre írva látjuk.
**a)** Mennyi az $X=\{s,a,b,e,f\}$ $st$-vágás kapacitása?
**b)** Vajon van-e kisebb kapacitású $st$-vágás a hálózatban?




*Ötlet:* A folyamnagyság $= m_f \le c(X) =$ vágáskapacitás egyenlőtlenség alapján *b)* egy megfelelő nagyságú folyam prezentálásával megválaszolható negatívan.

**5***. Legyen $G = (A,B,E)$ egy páros gráf, $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$, $B = \{b_1,\ldots,b_k\}$. Készítsünk egy $G'$ hálózatot: vegyünk fel $G$-hez egy új $s$ és egy új $t$ csúcsot, húzzuk be az $sa_i$ és a $b_jt$ (irányított) éleket minden $a_i \in A$, illetve $b_j \in B$ csúcsokra, és irányítsuk $G$ éleit $A$-ból $B$ felé. Minden él kapacitása legyen 1. Igazoljuk, hogy a $G'$ hálózatban a legkisebb kapacitású $st$-vágás kapacitása megegyezik $G$-ben a legkisebb lefogó ponthalmaz méretével.

**6.** A jobbra látható táblázat azt mutatja, hogy ha az $A,B,C$, ill. a $D$ dolgozó végzi el az $1,2,3,4$ munkát, akkor várhatóan mennyi azon cég haszna. Sajnos a 4-es munka egy garanciális javítás, csak veszteség van rajta, de muszáj elvégezni. Adjunk meg egy optimális hozzárendelést (mely maximalizálja a cég profitját), és igazoljuk is az optimalitást.

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 2 | 1 | -4 |
| B | 4 | 5 | 2 | -1 |
| C | 1 | 2 | 1 | -4 |
| D | 4 | 4 | 3 | -3 |

*Megoldás:* A magyar módszert csak nemnegatív élsúlyokra tanultuk, de itt vannak negatív élsúlyok. Viszont ha az utolsó oszlop minden elemét 4-gyel növeljük, akkor minden teljes párosítás összsúlya pontosan 4-gyel nő (mivel pontosan egy elemet tartalmaz az utolsó oszlopból), tehát a maximális súlyú teljes párosítások ugyanazok az eredeti problémára, mint a módosítottra. Elég tehát a módosított problémára találni egy optimális hozzárendelést (amit megtehetünk a magyar módszerrel), az az eredetire is optimális lesz. (Azt is megtehetjük, hogy a mátrix minden elemét megnöveljük néggyel; persze ekkor is nemnegatív mátrixot kapunk, és itt minden teljes párosítás súlya 16-tal nő, tehát ugyancsak nem változik, hogy mely teljes párosítások maximális súlyúak.)

**7.** Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek. Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!) (ZH'20)

| | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 11 | 7 |
| **2** | 13 | 11 | 10 |
| **3** | 10 | 12 | 9 |
| **4** | 14 | 20 | 16 |
| **5** | 10 | 10 | 8 |

**8.** A Bergengóc Szabad Egyetem Matematika Tanszékén három professzor (1, 2 és 3) hirdetett meg kutatási témákat, melyek iránt négy diák érdeklődik ($A$, $B$, $C$ és $D$). A mellékelt táblázat mutatja, hogy ha az adott diák a megfelelő oktatóval működik együtt, akkor a várható kutatási eredményeket milyen impakt faktorú lapban tervezik publikálni. Minden témavezetőnek legfeljebb két diákja lehet. Az egyetemi és nemzetközi rangsorolási szempontokat figyelembe véve a tanszék érdeke az, hogy a megjelenő publikációk összesített impakt faktora minél magasabb legyen. Adjunk olyan hozzárendelést, mely optimális ebben a tekintetben.

| | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 6 | 8 | 6 | 5 |
| **2** | 6 | 5 | 4 | 3 |
| **3** | 7 | 8 | 5 | 4 |

**9.** Az udvaron négyféle munkát kell elvégezni $(1,2,3,4)$, melyre négy, kiváló referenciákkal rendelkező, helyi vállalkozótól kértünk árajánlatot ($A$, $B$, $C$ és $D$). A jobbra látható táblázatban foglaltuk össze az árajánlatokat (százezer forintban értve). Természetesen szeretnénk a költségeket leszorítani (előzetes minőségi aggályok nem merülnek föl). Melyik munkára melyik vállalkozóval szerződjünk le, ha a mielőbbi befejezés érdekében a munkákat párhuzamosan szeretnénk végeztetni? (Egy vállalkozónak csak egy munkát adhatunk emiatt.)

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 2 | 6 | 3 |
| B | 7 | 5 | 9 | 8 |
| C | 5 | 2 | 7 | 3 |
| D | 7 | 3 | 9 | 5 |