Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

4. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Konvenció: Tetsz. $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A) = \sum\{f(a) : a \in A\}$.
Definíció: Adott $G = (V,E)$ gráf és $w\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén a P (teljes) párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(P) \geq \tilde{w}(P')$ teljesül a G tetszőleges P' (teljes) párosítására. (Itt két külön koncepciót nézünk: P vagy bármilyen párosítás lehet, vagy csak teljes párosításokra szorítkozunk.)
Megfigyelés: A maximális súlyú párosítás $w \equiv 1$ esetén maximális méretű párosítást jelent.
Definíció: Adott $G = (V,E)$ gráf és $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c\colon V \to \mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e = uv \in E$ élre $w(e) \leq c(u) + c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.
Állítás: Ha $c : V \to \mathbb{R}_+$ súlyozott lefogás a w súlyfüggvényhez, akkor tetszőleges P párosításra $\tilde{w}(M) = \sum\{w(uv) : uv \in P\} \leq \sum\{c(u) + c(v) : uv \in P\} \leq \tilde{c}(V)$ teljesül. (Megjegyzés: ha P *teljes* párosítás, akkor a súlyfüggvény nemnegativitására nincs szükség, és az utolsó becslésben mindig egyenlőség áll fenn.)
Következmény: (1) Ha $\tilde{w}(P) = \tilde{c}(V)$ teljesül valamely P teljes párosításra és c súlyozott lefogásra, akkor P maximális súlyú teljes párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.
(2) Ha a P teljes párosítás pontos élekből áll, akkor $\tilde{w}(P) = \tilde{c}(V)$.
Megjegyzés: Ha G élsúlyozott (páros) gráfban keresünk maximális súlyú párosítást, akkor megtehetjük a következőt: töröljük ki G-ből a negatív súlyú éleket (ha vannak; úgysem kerülnének bele egy max súlyú párosításba), egészítsük ki új csúcsokkal és 0 súlyú élekkel úgy, hogy teljes (páros) gráfot kapjunk, melyben van teljes párosítás. A kapott G' gráfban a max súlyú teljes párosítások lényegében ugyanazok, mint az eredeti G gráf max súlyú párosításai, azaz visszavezettük az eredeti problémát nemnegatív élsúlyú, teljes (páros) gráfok max súlyú teljes párosításaira.
Egerváry-algoritmus (magyar módszer) teljes páros gráfban max súlyú teljes párosítás keresésére.
Input: $n \times n$ táblázat (sorok ill. oszlopok a színosztályok, a mezőkbe írt számok az élsúlyok).
Output: súlyozott lefogás és teljes párosítás pontos élekből.
A sorokhoz 0 súlyt rendelünk, az oszlopokhoz pedig az adott oszlopban álló maximumot. A pontos éleken keresünk maximális méretű párosítást alternáló utakkal (ha fedetlen oszlopból fedetlen sorba érünk, az út mentén cserélve növeljük a párosítást, ahányszor lehet). Ha ez teljes párosítás, kész vagyunk. Ha nem, akkor megkeressük a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető sorokat és oszlopokat. Előbbieken növeljük, utóbbiakon csökkentjük a súlyozott lefogást a legnagyobb olyan ε értékkel, amivel még továbbra is súlyozott lefogást kapunk. Ezáltal a $\tilde{c}(V)$ csökken, és több oszlop lesz alternáló úton elérhető a fedetlen oszlopok halmazából. Innen ismételjük a folyamatot, azaz vagy nagyobb méretű párosítást találunk pontos élekből, vagy tovább csökkentjük a súlyozott lefogás összsúlyát. Előbb-utóbb meglesz a pontos élekből álló teljes párosítás.

Definíció: A *hálózat* egy (G,s,t,c) négyes, ahol $G = (V,E)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s,t \in V$ a G különböző csúcsai, ún. *termináljai* (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to \mathbb{R}_+$ egy *(st-)folyam*, ha $0 \leq f(e) \leq c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E} f(uv) = \sum_{vu\in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s,t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-szabály*, esetleg *csomóponti törvény*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $m_f = \sum_{su\in E} f(su) - \sum_{us\in E} f(us)$.
Definíció: A fenti hálózat egy *(st-)vágása* olyan $X \subset V$ halmaz, melyre $s \in X \not\ni t$. Az X vágás *kapacitása* $c(X) := \sum_{u\in X, v\in V\setminus X} c(uv)$, magyarán az X-ből $V \setminus X$-be futó (azaz X-ből kilépő) élek összkapacitása.
Állítás: tetszőleges f st-folyamra és tetszőleges X st-vágásra $m_f \leq c(X)$.

Gyakorlatok

1. A G teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ill. $\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, az a_ib_j él súlya pedig az egyik jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást mindhárom mátrix esetén (és mutassuk meg róluk, hogy maximálisak).

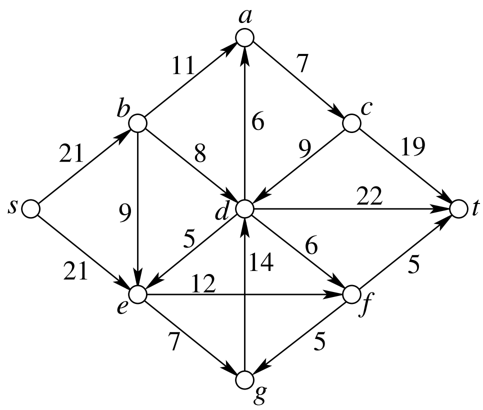
$$\textbf{a)}\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)}\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok, ill. az oszlopok felelnek meg, az (i,j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G-ben maximális súlyú párosítást (és igazoljuk is a maximalitását).

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

3. A G teljes páros gráf színosztályai legyenek $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ill. $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és igazoljuk is, hogy maximális). (ZH '09.)

4. Tekintsük az ábrán látható (G,s,t,c) hálózatot, ahol a c kapacitásfüggvény értékeit az élekre írva látjuk.
a) Mennyi az $X = \{s,a,b,e,f\}$ st-vágás kapacitása?
b) Vajon van-e kisebb kapacitású st-vágás a hálózatban?



5*. Legyen $G = (A,B,E)$ egy páros gráf, $A = \{a_1,\dots,a_n\}$, $B = \{b_1,\dots,b_k\}$. Készítsünk egy G' hálózatot: vegyünk fel G-hez egy új s és egy új t csúcsot, húzzuk be az sa_i és a b_jt (irányított) éleket minden $a_i \in A$, illetve $b_j \in B$ csúcsokra, és irányítsuk G éleit A-ból B felé. Minden él kapacitása legyen 1. Igazoljuk, hogy a G' hálózatban a legkisebb kapacitású st-vágás kapacitása megegyezik G-ben a legkisebb lefogó ponthalmaz méretével.

6. A jobbra látható táblázat azt mutatja, hogy ha az A,B,C, ill. a D dolgozó végzi el az $1,2,3,4$ munkát, akkor várhatóan mennyi azon cég haszna. Sajnos a 4-es munka egy garanciális javítás, csak veszteség van rajta, de muszáj elvégezni. Adjunk meg egy optimális hozzárendelést (mely maximalizálja a cég profitját), és igazoljuk is az optimalitást.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	1	-4
B	4	5	2	-1
C	1	2	1	-4
D	4	4	3	-3

7. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek. Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!) (ZH'20)

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

8. A Bergengóc Szabad Egyetem Matematika Tanszékén három professzor (1, 2 és 3) hirdetett meg kutatási témákat, melyek iránt négy diák érdeklődik (A, B, C és D). A mellékelt táblázat mutatja, hogy ha az adott diák a megfelelő oktatóval működik együtt, akkor a várható kutatási eredményeket milyen impakt faktorú lapban tervezik publikálni. Minden témavezetőnek legfeljebb két diákja lehet. Az egyetemi és nemzetközi rangsorolási szempontokat figyelembe véve a tanszék érdeke az, hogy a megjelenő publikációk összesített impakt faktora minél magasabb legyen. Adjunk olyan hozzárendelést, mely optimális ebben a tekintetben.

	A	**B**	**C**	**D**
1	6	8	6	5
2	6	5	4	3
3	7	8	5	4

9. Az udvaron négyféle munkát kell elvégezni $(1,2,3,4)$, melyre négy, kiváló referenciákkal rendelkező, helyi vállalkozótól kértünk árajánlatot (A, B, C és D). A jobbra látható táblázatban foglaltuk össze az árajánlatokat (százezer forintban értve). Természetesen szeretnénk a költségeket leszorítani (előzetes minőségi aggályok nem merülnek föl). Melyik munkára melyik vállalkozóval szerződjünk le, ha a mielőbbi befejezés érdekében a munkákat párhuzamosan szeretnénk végeztetni? (Egy vállalkozónak csak egy munkát adhatunk emiatt.)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5