Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

3. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Javító utas algoritmus páros gráfokban. Tetsz. A és B színosztályokkal rendelkező páros gráf maximális méretű párosítását megkaphatjuk a javító utas algoritmus segítségével. Input: $G=(A,B;E)$ ps gráf és egy $P \subset E$ párosítás. Output: egy maximális párosítás. Kiindulunk az P (akár üres) párosításból, és javító utat keresünk. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy P éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd valahogyan (pl BFS-sel) ellenőrizzük, hogy van-e irányított (egyszersmind alternáló) út egy A-beli fedetlen pontból egy B-beli fedetlenbe. 1) Ha van ilyen út, akkor az egy javító út, segítségével módosítjuk (növeljük) a P párosítást, majd újra keresünk javító utat. 2) Ha már nincs javító út, akkor az aktuális P párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$.

Def.: Ha $G=(V,E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists u \in X, vu \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli *szomszédsága*.

Megfigyelés: Egy $X \subset A$ csúcshalmazbeli csúcsok párjai minden párosításnál $N(X)$-ben vannak. Tehát ha $|N(X)| < |X|$, akkor nincs olyan párosítás, ami X minden csúcsát fedi (és így A csúcsait sem tudja maradéktalanul fedni). Sőt: ha $|N(X)| = |X| - d$ (ahol $d > 0$), akkor bármely párosítás legalább d csúcsot nem fed le X-ből, emiatt $\nu(G) \le |A| - d$.

Def.: egy $G=(A,B;E)$ páros gráfban egy $X \subset A$ csúcshalmaz *deficite* $\mathrm{def}(X) = |X| - |N(X)|$, ha $|N(X)| < |X|$, különben meg legyen 0.

Áll (konstruktív bizonyítékok P optimalitására): Tfh a $G=(A,B;E)$ páros gráfban nincs javító út egy P párosításra nézve, $|P| = |A| - d$. Legyen $X \subset A$, ill. $Y \subset B$ az A-beli fedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető A-beli, ill. B-beli csúcsok halmaza (X-be beleértjük az A-beli fedetlen csúcsokat is). Ekkor $N(X) = Y$, $\mathrm{def}(X) = d$, és $(A \setminus X) \cup Y$ egy $|P|$ méretű lefogó csúcshalmaz G-ben. Az előző észrevételek miatt $|P| \le \nu(G) \le |A| - \mathrm{def}(X) = |A| - d = |P|$, ill. $|P| \le \nu(G) \le \tau(G) \le |(A \setminus X) \cup Y| = |A| - |X| + |N(X)| = |A| - d = |P|$, tehát kétféle konstruktív bizonyítékunk is van arra, hogy P legnagyobb párosítás.

Köv. (Kőnig tétele): Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Köv. (deficites Hall-tétel): Tetsz. $G=(A,B;E)$ páros gráfban $\nu(G) = |A| - d$ pontosan akkor igaz, ha a legnagyobb deficitű $X \subset A$ halmaz deficite éppen d.

Köv. (Hall tétele): Tetsz. $G=(A,B;E)$ páros gráfban pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)| \ge |X|$ teljesül. (Ez az előző speciális esete $d=0$-ra.)

Megjegyzés.

(1) Páros gráf reprezentálható nemnegatív egészekből álló mátrixszal, ahol a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztálynak felelnek meg, és a mátrix elemei az adott sornak ill. oszlopnak megfelelő csúcsok között futó élek száma (egyszerű gráf esetén 0 vagy 1). A gráf párosítása olyan pozitív értékeket tartalmazó mezők kiválasztásának felel meg, amelyek bástyaelhelyezést alkotnak, azaz minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy kiválasztott mező van.

(2) Az alternáló utas algoritmussal tetszőleges $0/1$ mátrixban tudunk maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-est találni. Minden lépésben vagy eggyel több egyest találunk, vagy megállapítjuk, hogy elértük a maximumot. Ehhez fedetlen (azaz 1-est nem tartalmazó) oszlopból fedetlen sorba kell eljutni felváltva vízszintesen és függőlegesen 1-esről 1-esre lépve úgy, hogy a kiválasztott és ki nem választott 1-esek felváltva következnek. Ha ez sikerül, akkor a lépcsőzetes út mentén cserélünk, és több bástyaelhelyezésben álló 1-est kapunk. Ha nem sikerül, akkor megkapjuk az oszlopok egy X halmazát, amire az X-beli 1-esek $|X| - k$ sort töltenek ki, ahol k a fedetlen oszlopok száma. Ezért tetsz. bástyaelhelyezés esetén legalább k oszlopban nem áll 1-es. Mi épp ilyet találtunk, vagyis megvan a maximum.

Konvenció: Tetsz. $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A) = \sum\{f(a) : a \in A\}$.

Definíció: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén a P (teljes) párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(P) \ge \tilde{w}(P')$ teljesül a G tetszőleges P' (teljes) párosítására. (Itt két külön koncepciót nézünk: P vagy bármilyen párosítás lehet, vagy csak teljes párosításokra szorítkozunk.)

Megfigyelés: A maximális súlyú párosítás $w \equiv 1$ esetén maximális méretű párosítást jelent.

Definíció: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c\colon V \to \mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e = uv \in E$ élre $w(e) \le c(u) + c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.

Gyakorlatok

1. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. $0/1$-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Hogyan lehet a páros gráfunk egy e éléről eldönteni, kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban? Példa jobbra ill. $V = \{a,b,c,d,e,f,1,2,3,4,5,6\}$ és $E = \{a1, a2, a3, a4, b4, c4, c5, d2, d3, d4, d5, d6, e4, e5, f5\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először keresünk valahogyan (pl mohón) egy P párosítást, pl $P = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$.

A kiválasztott éleket, azaz 1-eseket megjelöljük a mátrixban. Idézzük föl, hogy néhány kijelölt egyes pontosan akkor alkot párosítást a gráfban, ha a mátrixban bástyaelhelyezésben állnak.

(Megjegyezzük, hogy itt P maximális abban az értelemben, hogy nem lehet kiegészíteni új él hozzávételével nagyobb párosítássá, de ennek ellenére nem egy legnagyobb méretű párosítás: mint látni fogjuk, van nála nagyobb.)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Javító utat keresünk: fedetlen oszlopból (amiben nincs kijelölt 1-es), azaz a 3-as és 5-ös oszlopból elternáló úton próbálunk fedetlen sorba eljutni. Ezt megkísérelhetjük próbálkozással vagy módszeresen is (pl BFS).

Fontos: az alternáló utak a mátrixreprezentációban felváltva függőleges és vízszintes lépéseket tartalmaznak, felváltva „sima” és kijelölt 1-eseken.

Ha eljutunk egy fedetlen sorba (ahol nincs kijelölt 1-es), akkor javító utat találtunk; a mi esetünkben ((sor, oszlop) jelöléssel) pl. $(4,5),(4,4),(1,4),(1,1),(5,1)$ ilyen (van amúgy más jav. út is).

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A javító út segítségével módosítjuk (és megnöveljük) a párosításunkat: az útban szereplő 1-eseket és $\boxed{1}$-eseket fölcseréljük (az útban nem szereplő 1-esek kijelöltségén nem változtatunk). Ilymódon egy eggyel nagyobb párosítást / bástyaelrendezést kapunk, lásd jobbra.

Megismételjük a folyamatot az új párosítással.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Most csak a 3-as oszlop fedetlen. Javító utat próbálunk találnu, de fölmerülhetnek kétségek, hogy ez sikerülni fog-e. Jelöljük meg azokat az oszlopokat és sorokat, melyeket el tudunk érni fedetlen oszlopból indulva alternáló úton. Megjegyzés: elért oszlopban függőlegesen léphetünk jelöletlen 1-esbe, elért sorban vízszintesen léphetünk az egyetlen $\boxed{1}$-be (ha van; ha nincs: fedetlen sor, hurrá, javító út). Ha elakadunk (mert sehonnan sem jutunk új eléretlen sorba/oszlopba) és nincs javító út, akkor egyrészt a tanult tétel alapján tudhatjuk, hogy a párosításunk maximális méretű, másrészt erre alább konstruktív bizonyítékot is adunk. Itt a 3., 5., és 2. oszlopokat és a 4., 2. sorokat értük el, javító utat nem találunk.

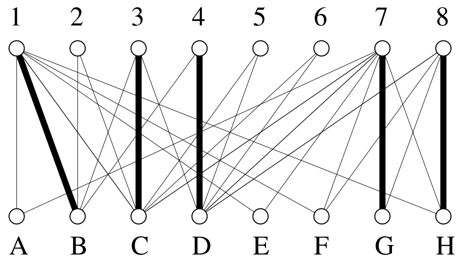
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Párosítsunk maximalitását konstruktív módon így igazolhatjuk: legyen O és S az elért oszlopok és sorok halmaza. Az O-beli oszlopokban minden 1-es egy S-beli sorban van (ha nem néztünk el semmit és tényleg elakadunk, akkor ez lesz a helyzet). Ha most $|S| = |O| - d$, akkor legalább d oszlopban nem fogunk sehogy sem tudni 1-est kiválasztani, és ez igazolja a párosítás maximalitását. A konkrét példánkban $O = \{2,3,5\}$ és $S = \{2,4\}$, $d = 1$.

Gráfos megközelítésben ez azt jelenti, hogy O (mint csúcsok egy halmaza) szomszédsága $N(O) = S$, így $\mathrm{def} O = |O| - |S| = d$, tehát $\nu(G) \leq$ oszlopok száma $-d$. De úgy is érvelhetünk, hogy az el nem ért oszlopok és az elért sorok uniója (mint csúcshalmaz) éppen $|P|$ méretű lefogó ponthalmaz a gráfban, és $\nu(G) \leq \tau(G)$ miatt ez igazolja P legnagyobb voltát.

Ha az e él duplán számít, akkor pontosan abban az esetben tud nagyobb párosítást eredményezni, ha van olyan maximális párosítás, mely tartalmazza e-t. Az e-t tartalmazó párosítást például úgy kereshetünk, ha e-t a végpontjaival együtt töröljük a G gráfból. Ha a maradékban van $\nu(G) - 1$ méretű párosítás, akkor az G-ben az e-vel együtt $\nu(G)$ darab élt tartalmazó párosítás lesz, és mivel az e duplán számít, ez $\nu(G) + 1$-nek számít. Ha nincs ilyen, akkor e-t csak legfeljebb $\nu(G) - 1$ méretű párosítások tartalmazzák G-ben, tehát hiába számít duplán az e, úgy is csak $\nu(G)$-nek számít. De úgy is kereshetünk e-t tartalmazó párosítást, ha csak az e végpontjaiból induló, e-től különböző éleket töröljük, és az így kapott gráfban keresünk maximális párosítást (ebben persze benne lesz e). Ha itt is $\nu(G)$ méretűt találunk, akkor megéri az e-t duplán számolni.

2. Tekintsük a jobbra látható gráfban a vastag élek által alkotott párosítást. Keressünk az alternáló utas módszerrel egy legnagyobb párosítást, majd alkalmas deficitű halmaz, továbbá megfelelő méretű lefogó ponthalmaz megadásával is igazoljuk, hogy valóban nincs nagyobb párosítás. (Szabad mátrixreprezentációban is dolgozni.)



Ötlet: $\nu = 6$.

3. Mutassuk meg, hogy ha $G = (V,E)$ élsúlyozott gráf a $w\colon E \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvénnyel és $c\colon V \to \mathbb{R}^+$ egy súlyozott lefogás, akkor tetszőleges P párosításra $\tilde{w}(P) \le \tilde{c}(V)$, azaz a párosítás összsúlya nem lehet nagyobb a súlyozott lefogás összsúlyánál.

Megoldás:

$$\tilde{w}(P) = \sum_{e\in P} w(e) \le \sum_{e=uv\in P} (c(u)+c(v)) = \sum_{v\in V\colon P \text{ fedi } v\text{-t}} c(v) \le \sum_{v\in V} c(v) = \tilde{c}V.$$

4. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ és $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Súlyozott lefogás-e a $c(a_i) = i$, $c(b_i) = i+1$ $(1 \le i \le 5)$?

b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?

Megoldás: **a)** Igen, súlyozott lefogás. Azt kell ellenőrizni, hogy minden a_ib_j él súlya w-nél legfeljebb annyi, mint a végpontjai c-beli súlyának összege, azaz $c(a_i)+c(b_j)$; magyarán vajon a táblázat i. sorának j. eleme legfeljebb annyi-e, mint $c(a_i)+c(b_j) = i+j+1$. Ha ezt alaposan ellenőrizzük, nem találunk problémát.

b) Igen, mert: eme lefogás összsúlya $1+2+3+4+5+2+3+4+5+6 = 35$. A mellékátlóban szereplő öt darab 7 súlyú élt kiválasztva a kapott P párosítás súlya 35. Mivel a tanultak szerint $35 = \tilde{w}(P) \le \tilde{c}(V)$ minden c súlyozott lefogásra fennáll, a mi súlyozott lefogásunknál valóban nincs kisebb összsúlyú lefogás.

5. A G páros gráf élei az $\{A,B,C,D\}$ ill. $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A,B,C ill. D pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli? (Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.) (pZH '20)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

Megoldás:

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	$\boxed{7}$	10	5
B	2	4	3	$\boxed{7}$	1
C	5	$\boxed{7}$	3	7	3
D	$\boxed{5}$	5	4	8	2
	3	4	2	6	

Először úgy választjuk ki a lehető legkisebb súlyokat az $\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}$ csúcsokhoz, hogy azok a lehető legkisebb összsúlyú súlyozott lefogást alkossák a feladatban meghatározott súlyokkal. Ehhez a táblázat minden oszlopához kiválasztjuk a legnagyobb olyan számot, amit úgy kapunk, hogy az adott oszlop eleméből kivonjuk az adott elem sorában álló előre megadott súlyt. Az így kapott értékek láthatók a bal oldali táblázat alsó sorában. **(4 pont)**

Az így kapott súlyozott lefogásra pontos élekből található teljes párosítás, pl a bekeretezett mezőkön állók ilyet adnak. **(2 pont)**

A kapott 26 összsúlyú teljes párosítást miatt minden súlyozott lefogás összsúlya legalább 26. **(2 pont)**

Mivel a megadott súlyokat egy pontosan 26 összsúlyú súlyozott lefogássá terjesztettük ki, ezért ez egy minimális összsúlyú súlyozott lefogás, a feladat kérdésére tehát igen a válasz. **(2 pont)**

6. Egy 600 km^2-es szigeten 6 törzs és 6 teknősfaj él. Az egyes törzsek vadászterülete és a teknősök élőhelye egyaránt 100-100 km^2. A vadászterületek nem fedik egymást, és a teknősök élőhelyei sem, de a teknősök élőhelyei és a vadászterületek között nincs összefüggés. Mutasd meg, hogy a törzsek tudnak maguknak egy-egy egymástól különböző, a saját vadászterületükön előforduló teknőst választani totemállatnak!

Ötlet: Készítsünk gráfmodellt, értelmezzük a kérdést, hogy mit is keresünk, és járjunk utána, hogy a megfelelő gráfmodellben milyen tételt tanultunk a keresett objektum létezésének igazolására.

7. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret!

8. Legyen $G(A,B;E)$ egy olyan páros gráf, amire $|A| = |B|$, továbbá minden $X \subset A$, $\emptyset \neq X \neq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X| + 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor G tetszőleges e éléhez van olyan teljes (minden csúcsot fedő) párosítás, amiben e szerepel.

9. A $G = (A,B;E)$ páros, egyszerű gráfban $|A| = |B| = n$, és $|E| \geq 10n + 1$. Mutassuk meg, hogy G-ben található 11 független él.

10*. Egy tó partján nyolcan horgásznak. A tóban 12 fajta hal él. Eddig minden fajtából legalább három horgásznak sikerült kifognia halakat, és minden horgász legfeljebb hatféle halat fogott. Mutassuk meg, hogy előfordulhat az, hogy a következő pillanatban minden horgász fog egy-egy halat, csupa különbözőt (tehát nyolcan együtt nyolcfélét), melyet ő még nem fogott.

11*. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keressünk jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen.