Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

3. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Javító utas algoritmus páros gráfokban. Tetsz. A és B színosztályokkal rendelkező páros gráf maximális méretű párosítását megkaphatjuk a javító utas algoritmus segítségével. Input: $G=(A,B;E)$ ps gráf és egy $P\subset E$ párosítás. Output: egy maximális párosítás. Kiindulunk az P (akár üres) párosításból, és javító utat keresünk. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy P éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd valahogyan (pl BFS-sel) ellenőrizzük, hogy van-e irányított (egyszersmind alternáló) út egy A-beli fedetlen pontból egy B-beli fedetlenbe. 1) Ha van ilyen út, akkor az egy javító út, segítségével módosítjuk (növeljük) a P párosítást, majd újra keresünk javító utat. 2) Ha már nincs javító út, akkor az aktuális P párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$.

Def.: Ha $G=(V,E)$ és $X\subseteq V$ akkor $N(X):=\{v\in V:\exists u\in X, vu\in E\}$ az X ponthalmaz G-beli *szomszédsága*.

Megfigyelés: Egy $X\subset A$ csúcshalmazbeli csúcsok párjai minden párosításnál $N(X)$-ben vannak. Tehát ha $|N(X)|<|X|$, akkor nincs olyan párosítás, ami X minden csúcsát fedi (és így A csúcsait sem tudja maradéktalanul fedni). Sőt: ha $|N(X)|=|X|-d$ (ahol $d>0$), akkor bármely párosítás legalább d csúcsot nem fed le X-ből, emiatt $\nu(G)\le|A|-d$.

Def.: egy $G=(A,B;E)$ páros gráfban egy $X\subset A$ csúcshalmaz *deficite* $\mathrm{def}(X)=|X|-|N(X)|$, ha $|N(X)|<|X|$, különben meg legyen 0.

Áll (konstruktív bizonyítékok P optimalitására): Tfh a $G=(A,B;E)$ páros gráfban nincs javító út egy P párosításra nézve, $|P|=|A|-d$. Legyen $X\subset A$, ill. $Y\subset B$ az A-beli fedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető A-beli, ill. B-beli csúcsok halmaza (X-be beleértjük az A-beli fedetlen csúcsokat is). Ekkor $N(X)=Y$, $\mathrm{def}(X)=d$, és $(A\setminus X)\cup Y$ egy $|P|$ méretű lefogó csúcshalmaz G-ben. Az előző észrevételek miatt $|P|\le\nu(G)\le|A|-\mathrm{def}(X)=|A|-d=|P|$, ill. $|P|\le\nu(G)\le\tau(G)\le|(A\setminus X)\cup Y|=|A|-|X|+|N(X)|=|A|-d=|P|$, tehát kétféle konstruktív bizonyítékunk is van arra, hogy P legnagyobb párosítás.

Köv. (Kőnig tétele): Ha G páros gráf, akkor $\nu(G)=\tau(G)$.

Köv. (deficites Hall-tétel): Tetsz. $G=(A,B;E)$ páros gráfban $\nu(G)=|A|-d$ pontosan akkor igaz, ha a legnagyobb deficitű $X\subset A$ halmaz deficite éppen d.

Köv. (Hall tétele): Tetsz. $G=(A,B;E)$ páros gráfban pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha bármely $X\subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)|\ge|X|$ teljesül. (Ez az előző speciális esete $d=0$-ra.)

Megjegyzés.

(1) Páros gráf reprezentálható nemnegatív egészekből álló mátrixszal, ahol a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztálynak felelnek meg, és a mátrix elemei az adott sornak ill. oszlopnak megfelelő csúcsok között futó élek száma (egyszerű gráf esetén 0 vagy 1). A gráf párosítása olyan pozitív értékeket tartalmazó mezők kiválasztásának felel meg, amelyek bástyaelhelyezést alkotnak, azaz minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy kiválasztott mező van.

(2) Az alternáló utas algoritmussal tetszőleges $0/1$ mátrixban tudunk maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-est találni. Minden lépésben vagy eggyel több egyest találunk, vagy megállapítjuk, hogy elértük a maximumot. Ehhez fedetlen (azaz 1-est nem tartalmazó) oszlopból fedetlen sorba kell eljutni felváltva vízszintesen és függőlegesen 1-esről 1-esre lépve úgy, hogy a kiválasztott és ki nem választott 1-esek felváltva következnek. Ha ez sikerül, akkor a lépcsőzetes út mentén cserélünk, és több bástyaelhelyezésben álló 1-est kapunk. Ha nem sikerül, akkor megkapjuk az oszlopok egy X halmazát, amire az X-beli 1-esek $|X|-k$ sort töltenek ki, ahol k a fedetlen oszlopok száma. Ezért tetsz. bástyaelhelyezés esetén legalább k oszlopban nem áll 1-es. Mi épp ilyet találtunk, vagyis megvan a maximum.

Konvenció: Tetsz. $f\colon H\to\mathbb{R}$ függvény és $A\subseteq H$ esetén $\tilde f(A)=\sum\{f(a):a\in A\}$.

Definíció: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E\to\mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén a P (teljes) párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde w(P)\ge\tilde w(P')$ teljesül a G tetszőleges P' (teljes) párosítására. (Itt két külön koncepciót nézünk: P vagy bármilyen párosítás lehet, vagy csak teljes párosításokra szorítkozunk.)

Megfigyelés: A maximális súlyú párosítás $w\equiv1$ esetén maximális méretű párosítást jelent.

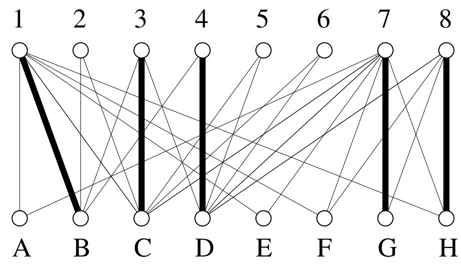
Definíció: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w\colon E\to\mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c\colon V\to\mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e=uv\in E$ élre $w(e)\le c(u)+c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.

Gyakorlatok

1. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. $0/1$-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Hogyan lehet a páros gráfunk egy e éléről eldönteni, kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban? Példa jobbra ill. $V=\{a,b,c,d,e,f,1,2,3,4,5,6\}$ és $E=\{a1,a2,a3,a4,b4,c4,c5,d2,d3,d4,d5,d6,e4,e5,f5\}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

2. Tekintsük a jobbra látható gráfban a vastag élek által alkotott párosítást. Keressünk az alternáló utas módszerrel egy legnagyobb párosítást, majd alkalmas deficitű halmaz, továbbá megfelelő méretű lefogó ponthalmaz megadásával is igazoljuk, hogy valóban nincs nagyobb párosítás. (Szabad mátrixreprezentációban is dolgozni.)



3. Mutassuk meg, hogy ha $G=(V,E)$ élsúlyozott gráf a $w\colon E\to\mathbb{R}^+$ súlyfüggvénnyel és $c\colon V\to\mathbb{R}^+$ egy súlyozott lefogás, akkor tetszőleges P párosításra $\tilde{w}(P)\le\tilde{c}(V)$, azaz a párosítás összsúlya nem lehet nagyobb a súlyozott lefogás összsúlyánál.

4. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ és $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.
a) Súlyozott lefogás-e a $c(a_i)=i$, $c(b_i)=i+1$ $(1\le i\le 5)$?
b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7\\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7\\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8\\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10\\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

5. A G páros gráf élei az $\{A,B,C,D\}$ ill. $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A,B,C ill. D pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli? (Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.) (pZH '20)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

6. Egy 600 km^2-es szigeten 6 törzs és 6 teknősfaj él. Az egyes törzsek vadászterülete és a teknősök élőhelye egyaránt 100-100 km^2. A vadászterületek nem fedik egymást, és a teknősök élőhelyei sem, de a teknősök élőhelyei és a vadászterületek között nincs összefüggés. Mutasd meg, hogy a törzsek tudnak maguknak egy-egy egymástól különböző, a saját vadászterületükön előforduló teknőst választani totemállatnak!

7. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret!

8. Legyen $G(A,B;E)$ egy olyan páros gráf, amire $|A|=|B|$, továbbá minden $X\subset A$, $\emptyset\ne X\ne A$ részhalmazra $|N(X)|\ge|X|+1$. Mutassuk meg, hogy ekkor G tetszőleges e éléhez van olyan teljes (minden csúcsot fedő) párosítás, amiben e szerepel.

9. A $G=(A,B;E)$ páros, egyszerű gráfban $|A|=|B|=n$, és $|E|\ge 10n+1$. Mutassuk meg, hogy G-ben található 11 független él.

10*. Egy tó partján nyolcan horgásznak. A tóban 12 fajta hal él. Eddig minden fajtából legalább három horgásznak sikerült kifognia halakat, és minden horgász legfeljebb hatféle halat fogott. Mutassuk meg, hogy előfordulhat az, hogy a következő pillanatban minden horgász fog egy-egy halat, csupa különbözőt (tehát nyolcan együtt nyolcfélét), melyet ő még nem fogott.

11*. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keressünk jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen.