Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

2. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def.: A G gráf *páros* vagy *kétosztályú* gráf, ha $V(G)$ felosztható két részre, A-ra és B-re úgy, hogy A is és B is független csúcshalmaz, azaz nincs olyan él, melynek mindkét végpontja A-ban van, vagy mindkét végpontja B-ben van. Azaz: G akkor páros gráf, ha $\chi(G) \leq 2$. Megjegyzés: Ha a felosztást is szeretnénk rögzíteni, akkor használhatjuk a $G = (A, B; E)$ vagy a $G = (A \cup B, E)$ jelöléseket is.

Tétel: G pontosan akkor páros gráf, ha G-ben nincs páratlan kör. (Megjegyzés: ez indokolja a páros gráf elnevezést, ami a „páros körüljárású gráf” rövidülése.)

Def.: A G gráf *jó élszínezése* az élek megszínezése oly módon, hogy az egy csúcsból induló élek színe különbözzön. A G gráf *élkromatikus száma* $\chi'(G) = k$, ha G élei k színnel kiszínezhetők jól, de $k-1$ színnel nem.

Áll.: Ha G véges gráf, akkor $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing-tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Shannon tétele: Tetsz. véges G gráfra $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

Kőnig tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Def.: *Párosítás* vagy *független élhalmaz*: közös végpont nélküli élek halmaza. $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális száma. A P párosítás *teljes*, ha G minden csúcsának van párja P-nél.

Megfigyelés: Egy jó élszínezés színosztályai függetlenek (párosítások). Egy párosítás minden éle két-két csúcsot használ, így $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V(G)|$.

Def.: A G gráf egy U ponthalmaza *lefogó* tulajdonságú, ha G minden élére illeszkedik legalább egy U-beli csúcs. $\tau(G)$ a G gráf lefogó ponthalmazai közül a legkisebb mérete.

Áll.: Minden G gráfban $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Def.: Ha $P \subset E(G)$ egy párosítás G-ben, egy út *alternáló* P-re nézve, ha élei felváltva P-beliek és P-n kívüliek. Egy út *javító út (P-re nézve)*, ha alternáló, és végpontjait nem fedi P. (Egy F élhalmaz akkor fed egy v csúcsot / X csúcshalmazt, ha v-ből / minden X-beli csúcsból indul F-beli él.)

Megfigyelés: ha van javító út P-re nézve, akkor az út P-beli éleit kidobva P-ből, a P-n kívülieket pedig bevéve P-be egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz.

Tétel: Legyen P egy párosítás G-ben. Ekkor $|P| < \nu(G)$ pontosan akkor teljesül, ha van G-ben javító út P-re nézve.

Gyakorlatok

1. Mennyi az n csúcsú kör (C_n) élkromatikus száma?

Megoldás: Páros n-re 2, páratlanra 3 (könnyű).

2. Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = 43$.

Megoldás: Mivel $\Delta(G) = 42$, $\chi'(G) \geq 42$, és mivel G egyszerű, Vizing tétele szerint $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = 43$. Ha $\chi'(G)$ épp 42 volna, akkor minden csúcsból minden színű élből pontosan egy kellene induljon, node akkor pl a piros élek párba állítanák a gráf csúcsait (teljes párosítást alkotnának), ami 99 csúcsú gráfon nem lehetséges. Ezért $\chi'(G) \neq 42$, tehát 43.

3. Legyen a G gráf V csúcshalmaza azon (x, y) rácspontok (egész koordinátájú pontok) halmaza a síkon, melyekre $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 1$ is teljesül, és pontosan akkor legyen él G-ben valamely (x, y) és (x', y') V-beli csúcsok között, ha $|x - x'| \leq 1$. Mennyi $\chi'(G)$?

Tipp: 5

4. Órarendet kell készíteni az általános iskolában. Minden osztálynak legfeljebb 25, minden tanárnak pedig legfeljebb 22 órája van egy héten. Igaz-e, hogy biztosan készíthető olyan órarend, hogy minden hétköznap csak az első 5 órában legyen tanítás? (Lukas órája a tanároknak és az osztályoknak is lehet.)

Megoldás: Osztály-tanár páros gráfot készítünk (ezek a csúcsok), a megtartani szükséges órák az élek (többszörös élek lehetnek pl az óraszámnak megfelelően, vagy multidiszciplináris tanerő esetén). Itt $\Delta \leq 25$, ezért az élek 25 színnel színezhetők Kőnig tétele miatt. Az egyes színek lesznek az egyes időpontok. Így a színezés segítségével megadható a kívánt tulajdonságú órarend.

5. Legyen $A = \{a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{16}\}$, $B = \{b_{-4}, b_{-3}, b_{-2}, \ldots, b_4\}$, $E = \left\{\{a_i, b_j\} : a_i \in A, b_j \in B, j^2 \geq i\right\}$. Mekkora a legnagyobb párosítás mérete $G = (A, B; E)$-ben? Igazoljuk a talált párosítás maximalitását úgy, hogy keresünk egy ugyanakkora lefogó ponthalmazt.

Tipp: 7

6. a) A jobbra látható táblázatban álló X-ek közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott X-ek bástyaelhelyezést alkossanak? (Azaz minden sorból és oszlopból legföljebb egy X-et választhatunk.) **b)** Több különböző bástyaelhelyezést kell készítenünk úgy, hogy minden X pontosan egy darab bástyaelhelyezésben szerepeljen. Található-e 2, 3, illetve 4 megfelelő bástyaelhelyezés? **c)** Mi köze ennek páros gráfokhoz, párosításokhoz?

	X		X		
	X			X	
			X	X	
X		X			X
	X			X	
			X		

Megoldás: A mátrixból készíthetünk páros gráfot úgy, hogy az egyik színosztály csúcsai az oszlopoknak, a másiké a soroknak felelnek meg, és akkor húzzunk élt egy oszlopcsúcs és egy sorcsúcs közé, ha a metszetükben van X. Ekkor egy bástyaelhelyezés a mátrixban éppen egy párosítás lesz a páros gráfban. (Ez persze fordítva is működik, páros gráfot reprezentálhatunk mátrixszal ilymódon.) Az X-ek fedése bástyaelhelyezésekkel jó élszínezésnek felel meg (minden bástyaelhelyezés egy-egy színosztály).

a) A maximum meghatározását megkísérelhetjük ötletszerűen, vagy a tanult alternáló utas módszerrel is. Nézzük meg most az előbbit: ránézésre keresünk minél több X-et bástyaelhelyezésben, például találunk 4-et az $(5,2)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(2,5)$ mezőkön (a jelölés: $(\text{sor}, \text{oszlop})$). A maximalitás igazolásához nem elég megtalálni a maximális számú X-et: be is kell bizonyítani, hogy több nem található. Ha találunk néhány sort és oszlopot (összesen mondjuk k darabot), melyek lefedik az *összes* X-et a táblázatban, akkor világos, hogy nem lehet k-nál több bástyát kiválasztani. (A mátrixhoz tartozó páros gráfban ez egy k csúcsból álló lefogó ponthalmaz.) Jelen esetben a 2., 4. és 5. oszlopok a 4. sorral lefedik az összes X-et, és négyen vannak; ez igazolja, hogy a bástyaelhelyezésünk valóban a lehető legnagyobb.

b) Mivel van olyan oszlop, melyben három X áll, és ezek más-más bástyaelhelyezésbe kell kerüljenek, ezért 2 bástyaelhelyezés biztosan nem elegendő. Három elég, például $\{(4,1),(5,2),(3,4),(2,5),\}$, $\{(2,2),(4,3),(1,4),(5,5)\}$, $\{(1,2),(6,4),(3,5),(4,6)\}$. Négy is könnyű, pl az egyik bástyaelhelyezést kettébontjuk. *Megjegyzés:* A páros gráfos modellben Kőnig élszínezési tétele alapján tudjuk, hogy $\chi'(G) = \Delta(G)$; egy csúcs fokszáma a megfelelő sorban / oszlopban található X-ek száma, így $\Delta(G) = 3$. Ez azt jelenti, hogy 3 bástyaelhelyezéssel megoldható a feladat, kevesebbel nem.

7. a) Egy G gráfban mohón kerestünk egy tovább nem bővíthető P párosítást, azaz addig veszünk be éleket P-be ötletszerűen (csak arra figyelve, hogy függetlenek legyenek), amíg csak tudunk. Igazoljuk, hogy $|P| \geq \nu(G)/2$, azaz a mohó eljárás nem is annyira rossz, legalább az optimum felét biztosan eléri. **b)** Állíthatunk-e hasonlót, ha mohón keresünk független ponthalmazt?

Megoldás: A mohó eljárás pontosan akkor akad el, ha az eddig bevett $|P|$ darab él $2|P|$ darab végpontja lefogó ponthalmazt alkot (ha nem így volna, akkor egy nem lefogott élt hozzávehetnénk a párosításhoz). Ekkor viszont $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2|P|$, ami átosztva igazolja az állítást. Független ponthalmazzal akármilyen rosszul járhatunk: vegyünk azt az n csúcsú G gráfot, melyben egy csúcs az összes többivel szomszédos, és nincs más éle. Ekkor $\alpha(G) = n-1$, de ha az $n-1$ fokú csúcsot választjuk elsőként, akkor a mohó eljárás rögtön elakad.

8. A Bergengóc Biztonsági Szolgálat feltérképezte, hogy a Bergengóciával barátságtalan Óperencia fontos államtitkait ismerő prominens óperent állampolgárok közül kik állnak egymással kapcsolatban. A BBSZ ügynökei be akarnak szervezni néhányat a prominens óperentek közül annak érdekében, hogy minden bizalmas beszélgetés tartalmáról jelentést kaphassanak. Persze a beszervezés nehéz, veszélyes és költséges feladat, így körültekintően kell eljárni. Hogyan lehetne megállapítani, hogy legkevesebb hány beszervezést kell végrehajtani?

Megoldás: A BBSZ munkája nyomán rendelkezésre áll a prominens óperentek mint csúcsok és a kapcsolatban álló párok mint élek által alkotott G beszervezési gráf. A potenciális beszélgetések a gráf éleinek felelnek meg, a beszervezendő személyek halmaza pedig lefogó csúcshalmazt kell alkosson a beszervezési gráfban. A kérdéses mennyiség tehát éppen $\tau(G)$.

9. Egy ismerkedési esten a szervező páros beszélgetéseket szervez az egymást még nem ismerő résztvevők közt. Hosszas munkával készített egy beosztást, ahol néhány embernek ugyan nem jutott pár, de számukra addig kötetlen teázást ajánl fel. Ekkor megjelenik a segédje, és azt állítja, hogy lehetséges olyan beosztást is készíteni, ahol több páros beszélget, és mutat is egy példát. A szervező viszont makacsul ragaszkodik ahhoz, hogy akit már beosztott beszélgetésre, azt nem küldjék teázni, abba viszont hajlandó belemenni, hogy néhány beszélgetésre beosztott ember beszélgetőpartnerét lecseréljék másvalakire. Mutassuk meg, hogy eme feltétel mellett is lehet több beszélgetős párt összehozni.

10. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin úgy helyeztünk el kavicsokat, hogy egyetlen sorban és egyetlen oszlopban sincs 42-nél több kavics. Bizonyítsuk be, hogy a mezőkön elhelyezett kavicsok beoszthatók legfeljebb 42 csoportba úgy, hogy a kavicsok minden csoportban bástyaelhelyezést alkossanak.

11. **a)** Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G-e) < 3$ $\forall e \in E$?
b) Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$, és $\chi(G-v) < 3$ $\forall v \in V$?

12. Tegyük föl, hogy az egyszerű, véges G gráfban minden csúcs foka 13, és van olyan e él, melyet elhagyva nő az összefüggőségi komponensek száma. Mennyi $\chi'(G)$?

Tipp: 14

13*. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül.

14. Egy Nemzeti Bajnokságon minden szezon végén a szervezőbizottság (a szervezési szabályzatnak megfelelően, a véget ért szezon eredményeit is figyelembe véve) elkészíti a következő szezon beosztását. Először meghatározzák, hogy mely csapatoknak kell egymással meccset játszaniuk; így kapják a G gráfot. Ezután a meccsek időbeosztása következik. Minden csapat hetente legfeljebb egy meccset játszhat, minden meccset este 18 órakor kezdenek a hét valamely (bármely) napján. Ha elkerülhetetlen, több mérkőzés is lehet egy napon, de a bizottság törekszik a párhuzamos meccsek számát minimalizálni. Használjuk a G gráf különféle paramétereit az alábbi kérdések megválaszolására.
a) Hány hét alatt lehet lebonyolítani a szezont?
b) A Sportújság minden meccsre szeretne egy tudósítót kiküldeni. Hány tudósítóra lesz szükség? Tudunk előzetes becslést adni a tudósítók szükséges számára, ha a G gráf már ismert, de a meccsek konkrét időbeosztása még nem? (Egy tudósító bárhány, akár heti hét meccsre is küldhető.)
c) A szezon végén az újság szeretne a csapatkapitányokkal interjút készíteni, de sajnos nincs elegendő forrás arra, hogy minden interjút leközöljenek. A minimálcél az, hogy minden meccsre reflektáljon legalább egy csapatkapitány. Hány interjúra van ehhez szükség?

15*. **a)** Ki akarom színezni egy gráf csúcsait a lehető legkevesebb színnel. Az az ötletem, hogy keresek egy maximális független csúcshalmazt, kiszínezem pirosra, a színtelen csúcsok közt megint keresek egy max független csúcshalmazt, kiszínezem kékre stb. Mutassuk meg, hogy ez nem annyira szuper ötlet: előfordulhat, hogy egy G gráfnál így több mint $\chi(G)$ színt használunk. Sőt: van olyan G gráf, amelyet így mindenképpen több mint $\chi(G)$ színnel fogunk kiszínezni.
b) Mi a helyzet akkor, ha az éleket akarom hasonló módon színezni, mindig egy legnagyobb független élhalmazt keresve?

16*. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is szedünk szét egy 52-lapos franciakártya-csomagot[1] 13 db 4 lapos csomagra, ki lehet választani mind a 13 csomagból egy-egy kártyát úgy, hogy csupa különböző értékű lapot válasszunk. (Egy lap értéke 13-féle lehet, mégpedig 2-től ászig.)

Tipp: Ügyes gráfmodell.

17*. Mennyi a K_n teljes gráf élkromatikus száma? Mi köze ennek körmérkőzések szervezéséhez?

Tipp: Függ n paritásától, páratlan n-re könnyebb. Koncentráljunk a színosztályokra.

18*. Tegyük fel, hogy (hurokmentes) G gráfnak m éle van, és $m = tk$. Mutassuk meg, hogy G élei pontosan akkor színezhetők ki jól k színnel úgy, hogy minden színosztály t élt tartalmaz, ha $\chi'(G) \leq k$.

19*. A 101 csúcsú teljes gráf, K_{101} élei úgy vannak megszínezve néhány színnel, hogy bárhogyan választva ki három csúcsot, a köztük menő három él vagy egyszínű, vagy csupa különböző színű. Mutassuk meg, hogy a színezésben használt színek száma vagy 1, vagy legalább 12.

---

[1] $\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\} \times \{2, \ldots, 10, J, Q, K, A\}$