Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

1. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók **Def.:** A G hurokmentes egyszerű gráf csúcsainak egy jó *k-színezésén* az $1,2,\ldots,k$ számoknak (= színeknek) a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan $c\colon V(G) \to \{1,2,\ldots,k\}$ függvény, amire $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.) Egy ($k$-)színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztály*nak nevezzük. (Színosztályon belül G-nek nem futhat éle.) A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Megfigyelés: Ha G k-színezhető, akkor G-ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarnak. Gráfok csúcsainak színezésekor feltehető, hogy a gráf egyszerű.

Def.: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k csúcs, melyek közt az összes él be van húzvam, de $k+1$ ilyen csúcs már nincs.)

Def.: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független ponthalmaz*, ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli.

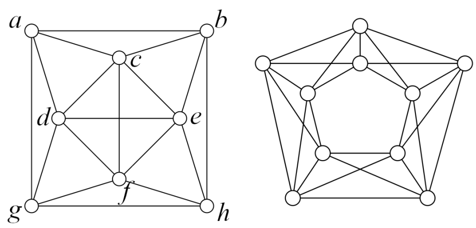
Mohó színezés: G csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő v csúcs az első olyan színt kapja, amely nem fordul elő v már megszínezett szomszédainál.

Megfigyelés: Ha v foka $d(v)$, akkor a mohó színezésnél v színe az $\{1,2,\ldots,d(v)+1\}$ halmazból kerül ki (hiszen v-nél legfeljebb $d(v)$ szín lehet tilos).

Áll.: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)+1$ ($\Delta(G)$ jelöli a G-ben előforduló legnagyobb fokszámot).

Gyakorlatok

1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma?



Megoldás: Első gráf: az órán tanultak miatt $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus számra alsó becslés a maximális klikkméret. A G gráf „középső” négy csúcsa egy 4-pontú klikket alkot, ezért $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$, tehát a legalább 4 szín szükséges G színezéséhez. Négy színnel ki lehet színezni a gráfot (ha igyekszünk, menni fog), azaz $\chi(G) \leq 4$. Ezt az előző becsléssel összevetve $\chi(G) = 4$ adódik a kromatikus számra.

Második gráf: láthatóan van K_4 részgráf, így $\omega(G) \geq 4$. Próbáljuk meg kiszínezni négy színnel. Az óramutató járásának megfelelően nézzük meg az öt darab csúcspárt, melyeket a „belső ötszög” és a „külső ötszög” megfelelő csúcsai alkotnak (minden ilyen pár két éllel összekötött csúcsból áll). Az első pár két csúcsa legyen mondjuk piros és kék (mindegy, milyen leosztásban). A következő pár két csúcsa az előző párral egy K_4-et alkot, tehát ezeknek kell két új szín, mondjuk zöld és sárga. Ha csak ezt a négy színt akarjuk használni, akkor a következő pár ugyanilyen érveléssel ismét p, k színű lesz, a következő z, s stb, más lehetőség nincs. Viszont így sem lehet az összes csúcsot megszínezni, tehát $\chi(G) \geq 5$. Öt szín viszont elég, pl színezzük körbe a belső ötszög csúcsait $1,\ldots 5$ színekkel, és a külső ötszögét is, csak az utóbbinál kettővel odábbi csúcsból indulva.

2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a,b,c,d,e,f,g,h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?

Megoldás: Az órán tanult mohó színezés során a soron következő csúcs mindig az első olyan színt kapja, ami különbözik a már korábban kiszínezett szomszédai színétől, így a kapott színezés:

csúcs:	a	b	c	d	e	f	g	h
szín:	1	2	3	2	1	4	1	5

3. **a)** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. **b)** Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G gráfra, melyre $\chi(G) = 2$, de a csúcsok peches sorrendje esetén a mohó színezés n színt használ.

Megoldás: **a)** Színezzük ki G csúcsait az $1,2,\ldots,\chi(G)$ színekkel, és a kapott színek növekvő sorrendjében színezzük mohón G csúcsait. Ezáltal tetsz. csúcs színe legfeljebb a kiindulási színezés szerinti színe lesz (gondoljuk meg!), tehát nem használunk $(\chi(G)+1)$-dik színt.

b) Jelöljük a csúcsokat $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$-nel, és húzzunk a_i és b_j közé élt, ha $i \neq j$ (tehát minden csúcs szomszédos a másik kupac az összes csúcsával, a „szemben” lévő csúcs kivételével), és a mohó eljárást alkalmazzuk az $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n$ sorrendben. Minden $i = 1,2,\ldots,n$-re az a_i és a b_i színe éppen i lesz, tehát n szín fog kelleni.

4. Bergengóciában néhány rádiócsatorna szeretne frekvenciákat kapni műsorainak sugárzásához. A Bergengóc Kommunikációs Hatóság (BKH) felügyeli a frekvenciák kiosztását. Hogy ne zavarják egymást, két műsorszóró állomás csak akkor használhatja ugyanazon frekvenciát, ha legalább 200 km-re vannak egymástól. A BKH szeretné a lehető legkevesebb frekvenciát használni. Adjunk gráfelméleti modellt a minimálisan szükséges frekvenciák számának meghatározásához.

Megoldás: Készítsünk gráfot. A csúcsok legyenek a sugározandó csatornák a megfelelő műsorszóró állomáshoz rendelve (tehát ha egyazon csatorna több állomásról is kívánja szórni műsorát, akkor a csatorna minden kiszemelt állomásnak megfelelően kap egy-egy csúcsot a gráfban), és akkor legyen él két csúcs között, ha a megfelelő műsorszóró állomások távolsága kevesebb, mint 200 km. A kapott gráf jó színezése engedélyezhető frekvenciakiosztásnak felel meg (a színek a frekvenciák), tehát a kromatikus száma éppen a minimálisan szükséges frekvenciák száma.

5. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

Megoldás: A huszár világos és sötét mező között lép, ezért $\chi \leq 2$, de nyilván nem 1. A bástya gráfjában minden oszlop és sor K_8-at alkot, tehát $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 8$. Az első oszlopot színezzük föntről lefelé az $1, 2, \ldots, 8$ színekkel, a másikat ugyanígy, csak egy mezővel lejjebbről indulva, és a 8-as szín a legfölső mezőre kerül (tehát eggyel lejjebb toljuk a színezést, ciklikusan), a következő oszlopnál még eggyel eltolva színezünk így stb, tehát 8 szín elég is, így $\chi(G) = 8$. A futó gráfjának két izomorf („egyforma") komponense van, mindegyik a bástyagráf egy részgráfja. Tehát 8 szín elég (és az átlók miatt kell is). A király gráfjában $\omega \geq 4$ (egy 2×2-es kis négyzet), de 4 szín elég, soronként 2-t használva, felváltva.

6. Van-e olyan gráf, amiben nincs K_3 klikk, de G nem színezhető ki 2 színnel? Hát olyan, melyben nincs K_4 klikk, de mégsem színezhető ki 3 színnel?

Megoldás: Persze, pl egy C_5, illetve egy C_5 plusz egy mindenkivel szomszédos új csúcs.

7. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

Megoldás: G-ben van K_8 (bármely 8 egymást követő szám), szóval $\chi \geq 8$. De 8 szín elég is, ciklikusan (avagy mohón, növekvő sorrend szerint).

8. A G gráf két komponensből áll, ezek K és H. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy **a)** $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$; **b)** $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

Megoldás: Triviális a definícióból, a másodikhoz meg a H-n és a K-n különböző színeket kell használni.

9. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Megoldás: Tegyük fel, hogy a G gráf $\chi(G)$ színnel van kiszínezve. Ekkor bármely két színosztály között kell élnek vezetnie, ugyanis ha két színosztály csúcsai között nem vezetne él, akkor e két színosztály csúcsait közös színnel színezve a kromatikus számánál eggyel kevesebb színnel tudnánk G-t kiszínezni, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy a $\chi(G)$ színosztály közül bármely kettőt kiválasztva látunk egy-egy élt G-ben, tehát G-nek legalább $\binom{\chi(G)}{2}$ éle kell legyen.

10. Maximum mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

11. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?

12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G + e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.

13. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1 - 1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.

14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.

15*. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$.