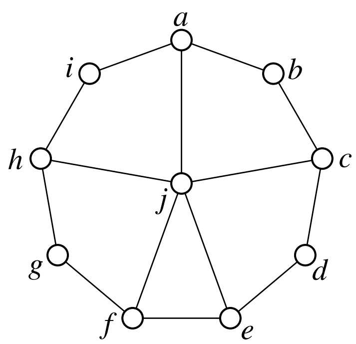
# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH javítókulcs (2024.04.08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

**1.** Egy tíz fős cég munkatársai csapatépítés céljából szabadulószobázni mennek. Az ismeretségek elmélyítése érdekében azok a munkatárak, akiknek már volt közös projektjük, nem mehetnek ugyanabba a szobába. A jobbra látható gráf csúcsai reprezentálják a cég dolgozóit, és két csúcs közt akkor van él, ha a megfelelő személyeknek már volt közös projektje. A négy szabadulószobát üzemeltető vállalkozó valamilyen sorrendben haladva, egymás után osztja be a résztvevőket: az éppen aktuális delikvenst beküldi az első olyan szobába, ahol még nincs olyan kolléga, akivel volt közös projektje. Előfordulhat-e az, hogy a vállalkozó…




**a)** … csak az első három szobába küldi a tíz résztvevőt? **(3 pont)**
**b)** … mind a négy szobába küld valakit? **(3 pont)**
**c)** … bajba kerül, mert szüksége volna egy ötödik szobára a beosztáshoz? **(6 pont)**
(Javaslat: fogalmazzunk meg egy matematikai modellt, és abban válaszoljuk meg a három kérdést.)

*Megoldás:* A feladat valójában azt kérdezi, hogy a kapott gráf csúcsait valamilyen sorrendben mohón színezve (a tanult eljárás szerint) hány színt fogunk használni, ahol a szobák a színeknek felelnek meg.

**a)**
Igen. A csúcsokat ABC-sorrendben színezve három színt fogunk használni, ahogy az alábbi táblázat is mutatja:

| csúcs | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| szín | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 |

**(3 pont)**

**b)** Igen, például az alábbi táblázatban látott sorrend szerint haladva 4 színt fogunk használni:

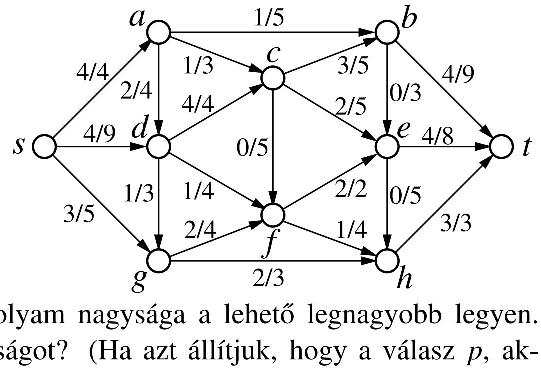
| csúcs | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $a$ | $j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| szín | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |

**(3 pont)**

**c)** Nem. A gráfban az $a, b, \dots, i$ csúcsok egy kört alkotnak. A csúcsok tetszőleges sorrendje esetén van néhány (esetleg egy sem) csúcs a körről, aztán $j$, aztán a maradék csúcsok a körről (esetleg egy sem). **(0 pont)**
Ha a $v$ csúcsot a $j$ előtt színezzük ki, akkor a $v$ színezésekor $v$-nek legfeljebb két színes szomszédja lehet, tehát az $1, 2, 3$ színek valamelyikét biztosan megkaphatja. **(2 pont)**
Emiatt a $j$-nek a már megszínezett szomszédai összesen csak háromféle színt használhatnak, így $j$-nek biztosan választhatunk színt az $1, 2, 3, 4$ színek közül. **(2 pont)**
A hátralevő csúcsoknak pedig a fokszáma legfeljebb három, tehát legfeljebb három szín lehet tiltva náluk a színezésükkor, így szintén biztosan színezhetők az $1, 2, 3, 4$ színekből. **(2 pont)**
Öt színre tehát sosem lesz szükség. **(0 pont)**
*Megjegyzés:* a kérdések a mohó színezésre való átfogalmazás nélkül is megoldhatók, helyes válasz és indoklás esetén természetesen ekkor is jár a megfelelő pontszám. Aki helyesen átfogalmazza a feladatot mohó színezésre, az erre **2 pont**ot kaphat a részfeladatok megoldása nélkül is (de természetesen összesen maximum 12 pontot).

---

**2.** Az ábrán egy hálózat látható; az élekre írt $a/b$ alakú kifejezésben az első szám ($a$) egy $st$-folyam értéke az adott élen, a második szám ($b$) pedig az él kapacitása.

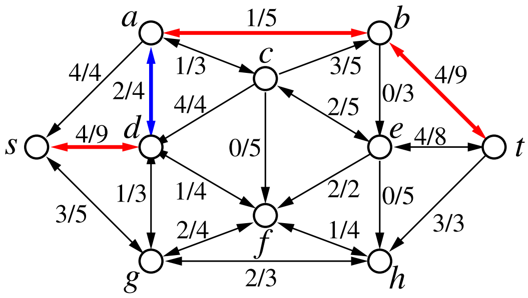


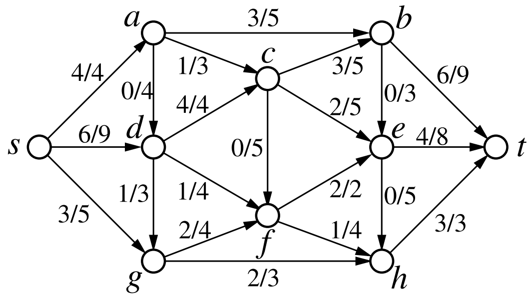

**a)** Döntsük el, hogy a megadott folyam maximális $st$-folyam-e. Ha igen, mutassunk erre bizonyítékot; ha nem, akkor módosítsuk a folyamot úgy, hogy maximális $st$-folyamot kapjunk (és persze a módosított folyam maximalitását se feledjük el igazolni). **(7 pont)**
**b)** Egyetlen él irányításának megfordítására van lehetőségünk. Úgy szeretnénk ezt megtenni, hogy a kapott hálózatban a maximális $st$-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen. Mennyivel lehetséges ilymódon megnövelni a maximális folyamnagyságot? (Ha azt állítjuk, hogy a válasz $p$, ak-

kor mutassunk élt, melynek megfordításával valóban $p$-vel nő a maximális folyamnagyság, és indokoljuk meg, hogy semelyik él megfordításával sem nő $p$-nél többel.) **(7 pont)**

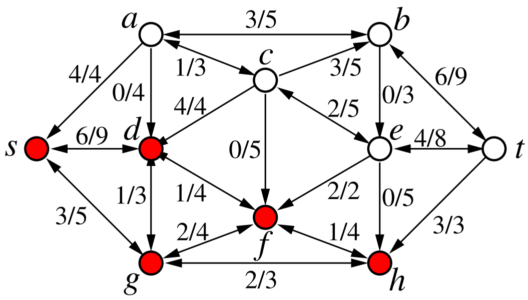
*Megoldás:* **a)** Az órán tanult módszert követve elkészítjük a folyamhoz tartozó segédgráfot: ha egy élen lehet növelni a folyamot, akkor bevesszük az eredeti irányítással, ha csökkenteni lehet, akkor a fordítottal (esetleg mindkettővel), lásd bal oldali ábrán. **(2 pont)**

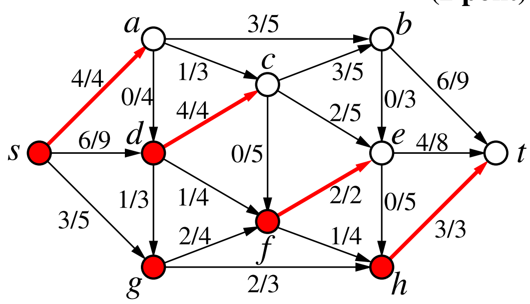
A segédgráfban $s,d,a,b,t$ irányított út $s$-ből $t$-be, tehát az eredeti gráfban a folyam e mentén a javító út mentén $\varepsilon = 2$-vel javítható (előreélen (piros) növelünk, visszaélen (kék) csökkentünk), tehát kapunk egy 13 nagyságú $st$-folyamot (ld. jobbra). Ez igazolja, hogy az eredeti nem volt maximális. **(2 pont)**




A kapott folyam maximális lesz: a hozzá tartozó (módosított) segédgráfban (ld. balra) nincs irányított $st$-út. Az $s$ csúcsból a segédgráfban elérhető csúcsok halmaza $X = \{s,d,g,f,h\}$ (pirosak), az $X$ halmazból az eredeti gráfban kilépő élek (pirosak, ld. jobbra): $sa, dc, fe, ht$, az indukált vágás kapacitása tehát ezen élek kapacitásainak összege, $4+4+2+3 = 13$. **(2 pont)**




Mivel minden $st$-folyam nagysága legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges $st$-vágás kapacitása, a talált folyamunk valóban maximális. **(1 pont)**

Természetesen ha valaki a segédgráf nélkül találja meg a megfelelő folyamot és vágást, az is maximális pontszámot érhet.

**b)** A tanult tétel alapján egy maximális $st$-folyam nagysága és egy minimáis $st$-vágás kapacitása megegyezik. Emiatt elég azt vizsgálni, hogy egy él megfordításának hatására hogyan változik egy-egy $st$-vágás kapacitása. **(1 pont)**

Legyen $s \in X$, $t \notin X$. Ha az $e = uv$ él mindkét végpontja $X$-ben van, vagy mindkét végpontja $X$-en kívül van, akkor az $e$ megfordítása nem változtatja meg az $X$ által indukált vágás kapacitását. **(1 pont)**

Ha $e$ kilép $X$-ből, akkor $e$ megfordításával $X$ kapacitása $c(e)$-vel csökken, hiszen $e$ már nem fog kilépni $X$-ből. Ha $e$ belép $X$-be, megfordításával $X$-ből kilépő él lesz belőle, tehát $c(e)$-vel fog nőni $X$ kapacitása. **(1 pont)**

Tetszőleges $X$ vágásra egyetlen $sv$ vagy $vt$ él sem léphet $X$-be, megfordításuk tehát nem növelheti $X$ kapacitását. Az összes többi él kapacitása legfeljebb 5, így megfordításukkal legföljebb 5-tel nőhet az $X$ kapacitása. Emiatt az új hálózatban legfeljebb 5-tel lehet nagyobb egy $st$-folyam, mint az eredetiben. **(2 pont)**

A $cf$ él megfordítása után pedig valóban lehet növelni 5-tel az előző folyamunkat: az $s,d,f,c,e,t$ út mentén hárommal, az $s,g,f,c,b,t$ út mentén kettővel. Így a legnagyobb elérhető növekedés valóban 5. **(2 pont)**

---

**3.** Az oldalt látható mátrix az $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ és $\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az $A_iB_j$ él súlya az $A_i$ indexű sor és a $B_j$ indexű oszlop metszetében álló szám.

**a)** Van-e olyan maximális súlyú párosítás a gráfban, melyben az $A_1B_2$ és az $A_4B_1$ él is szerepel? **(3 pont)**

**b)** Adjuk meg a gráf egy maximális súlyú párosítását és egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. **(9 pont)**

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 8 | 8 | 5 | 6 |
| $A_2$ | 4 | 7 | 3 | 4 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 |
| $A_4$ | 7 | 8 | 6 | 7 |

*Megoldás:* **a)** Nem: ha egy párosításban szerepelnek az $A_1B_2$ és az $A_4B_1$ élek, azok összsúlya 15, viszont a párosításban lecserélve őket a 16 összsúlyú $A_1B_1$ és az $A_4B_2$ élekre (a párosítás többi élét változatlanul hagyva), a párosítás összúlya eggyel nő, tehát nem volt maximális. **(3 pont)**

**b)** Alkalmazzuk az órán tanult magyar módszert. Kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximok, azaz $8,8,6,7$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. Ha lehet, növeljük a párosítást javító úton (a fedetlen oszlopokból indulva alternáló utakat keresünk), ha nem, csökkentjük a lefogás összsúlyát a tanult módon. Az algoritmus helyes futtatása 7 pontot ér. Bárhogyan máshogyan talált max súlyú teljes párosítás és minimális súlyú lefogás szintén 7 pont, de ha csak az egyik jó, akkor 3 pont. Az algoritmus lépései alább láthatók. Ha nem található javító út, az alternáló úton elért oszlopokat és sorokat nyilak jelzik; az előbbieken csökkentjük, utóbbiakon növeljük a lefogás súlyait. **(7 pont)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | **8** | **8** | 5 | 6 | 0 |
| $A_2$ | 4 | 7 | 3 | 4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 |
| $A_4$ | 7 | **8** | **6** | **7** | 0 |
| | 8 | 8 | 6 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | 5 | 6 | 0 |
| $A_2$ | 4 | 7 | 3 | 4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 |
| $A_4$ | 7 | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **6** | **7** | 0 |
| | 8 | 8 | 6 | 7 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | |
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | 5 | 6 | 0 | $\leftarrow$ |
| $A_2$ | 4 | 7 | 3 | 4 | 0 | |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 | |
| $A_4$ | 7 | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **6** | **7** | 0 | $\leftarrow$ |
| | 8 | 8 | 6 | 7 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | 5 | 6 | 1 |
| $A_2$ | 4 | **7** | 3 | 4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 |
| $A_4$ | 7 | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **6** | **7** | 1 |
| | 7 | 7 | 5 | 6 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | 5 | 6 | 1 |
| $A_2$ | 4 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 3 | 4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 |
| $A_4$ | 7 | **8** | $\boxed{\mathbf{6}}$ | **7** | 1 |
| | 7 | 7 | 5 | 6 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | |
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | 5 | 6 | 1 | |
| $A_2$ | 4 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 3 | 4 | 0 | |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | 5 | 0 | |
| $A_4$ | 7 | **8** | $\boxed{\mathbf{6}}$ | **7** | 1 | $\leftarrow$ |
| | 7 | 7 | 5 | 6 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | **8** | **5** | **6** | 1 |
| $A_2$ | 4 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 3 | 4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 6 | 3 | $\boxed{\mathbf{5}}$ | 0 |
| $A_4$ | 7 | 8 | $\boxed{\mathbf{6}}$ | **7** | 2 |
| | 7 | 7 | 4 | 5 | |

A kapott párosítás $(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_4, A_4B_3)$ összsúlya $8+7+6+5=26$, a kapott lefogás összsúlya $7+7+4+5+1+0+0+2=26$. A tanultak szerint bármely teljes párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint bármely súlyozott lefogás összsúlya, tehát a kapott teljes párosítás valóban maximális súlyú, a kapott lefogás minimális összsúlyú. **(2 pont)**

---

**4.** Oldjuk meg az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max 5x+6y, &\text{ ha} \\ x,y &\geq 0 \\ x+4y &\leq 50 \\ 4x+5y &\leq 90 \\ 3x+2y &\leq 57 \end{aligned}$$

**(12 pont)**

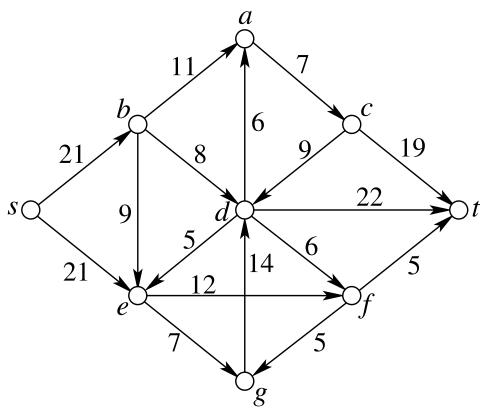
*Megoldás:* A nemnegativitási feltételek utáni három feltételre $F1$, $F2$, $F3$-ként hivatkozunk; egyúttal ezek fogják jelölni a feltételekből adódó félsíkok határoló egyeneseit (a feltételt egyenlőséggel teljesítő pontok halmazát) is.
Meghatározzuk a poliédert (a feltételeket kielégítő $(x,y)$ pontok halmazát a síkon), a csúcsok a feltételek határegyeneseinek metszéspontjaiból kerülnek ki. Az $x=0$ tengellyel a metszéspontok: $F1:(0,12.5)$, $F2:(0,18)$, $F3:(0,28.5)$, ezek közül csak az első van a poliéderben (a többi nyilván nem teljesíti $F1$-et). **(1 pont)**
Az $y=0$ tengellyel a metszéspontok: $F1:(50,0)$, $F2:(22.5,0)$, $F3:(19,0)$, ezek közül csak az utolsó van a poliéderben (a többi nyilván nem teljesíti $F3$-at). **(1 pont)**
A három lineáris feltétel metszéspontjai: $F1\cap F2=(10,10)$, ez teljesíti $F3$-at $(50\leq 57)$, tehát a poiéder pontja, így csúcs lesz; $F2\cap F3=(15,6)$, ez teljesíti $F1$-et is $(39\leq 50)$, tehát a poliéder pontja, így csúcs lesz; $F1\cap F3=(12.8,9.3)$, de ez nem teljesíti $F2$-t $(4\cdot 12.8+5\cdot 9.3=97.7>90$, így nincs a poliéderben. **(3 pont)**
Tehát a poliéderünk csúcsai $(0,0)$, $(0,12.5)$, $(10,10)$, $(15,6)$, $(19,0)$. **(1 pont)**
A tanultak szerint a célfüggvény fölveszi a maximumát a poliéder valamely csúcsában, **(3 pont)**
a célfv értékei a csúcsokban rendre 0, 75, 110, 111, 95, tehát a maximum $x=15$, $y=6$ esetén realizálódik, **(2 pont)**
értéke 111. **(1 pont)**

# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. PZH javítókulcs (2024.04.24. 18-20, E1C)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

**1.** Keressünk maximális $st$ folyamot és minimális $st$ vágást az ábrán látható hálózatban (és ne felejtsük el megindokolni, hogy az adott folyam / vágás miért maximális / minimális). **(11 pont)**




*Megoldás:* A hálózatban van 32 nagyságú folyam, például az $sbact$ út mentén 7-tel, az $sbdt$ út mentén 8-cal, az $seft$ út mentén 5-tel, az $segdt$ út mentén 7-tel, majd az $sefgdt$ út mentén 5-tel növelve a folyamot. **(5 pont)**
(Maximális folyam megtalálása (bármilyen módszerrel) **4 pont**ot ér, nagyságának megállapítása **1 pont**ot. Aki segédgráfot használ, az a folyam megtalálására járó 4 pontból legfeljebb **3 pont**ot kaphat a helyes lépések arányában akkor is, ha nem sikerült 32 nagyságú folyamot találnia. Aki ránézésre talál folyamot, de nem maximálisat, az legfeljebb **1 pont**ot kaphat az 5-ből.)
A hálózatban van 32 kapacitású vágás, például az $X = \{s,b,a,e,f\}$ (által indukált) vágás. **(3 pont)**
$X$ kapacitása az $X$-ből kilépő élek kapacitásainak összege. Az $X$-ből kilépő élek halmaza $\{bd, ac, eg, fg, ft\}$, ez alapján $X$ kapacitása $8+7+7+5+5 = 32$. **(2 pont)**
(Aki segédgráfból helyes ismeretek alapján próbál minimális vágást találni, de kivitelezési hiba miatt nem sikerül, az első 3-ból legföljebb **2 pont**ot kaphat, a vágás kapacitásának helyes kiszámítására megkaphatja a maradék **2 pont**ot. Ránézésre talált, de nem minimális vágás esetén csak a vágás kapacitásának ismeretére és kiszámítására járó **2 pont** ítélhető meg.)
Azt tanultuk, hogy bármely folyam nagysága legfeljebb akkora, mint bármely vágás kapacitása, tehát a 32 kapacitású vágásunk miatt a talált folyamunk valóban maximális, és a 32 nagyságú folyamunk miatt a talált vágásunk valóban minimális. **(1 pont)**
**Kegészítés:** aki ránézésre keres folyamot is, vágást is, de valamelyik nem optimális, és nem tudja befejezni a feladatot, az a 11-ből legfeljebb **4 pont**nyi részpontszámot kaphat.

---

**2.** A piréz $A$ és a pritek $B$ cégcsoport egyaránt négy-négy vállalattal rendelkezik ($A_1,\dots,A_4$ és $B_1,\dots,B_4$). A piréz-pritek kétoldalú támogatások minél sikeresebb kiaknázása érdekében minden $A_iB_j$ vállalatpár beadna egy-egy pályázatot ($1 \le i,j \le 4$), melyekhez a szükséges együttes önerő mértékét a mellékelt táblázat tartalmazza (millió petákban értve). A pályázatok beadásának feltétele, hogy a két pályázó vállalat együttesen rendelkezzen a szükséges önerővel (ez pályázatonként külön-külön teljesítendő; azt nem vizsgálja senki, hogy ha egy vállalat esetleg több nyertes pályázatban is szerepelne, akkor az összeshez elő tudná-e teremteni a megfelelő önerőt a partnereivel). Emaitt a cégcsoportok vezetői az egyes vállalatok számára rendelkezésre bocsátandó pénzösszegek szétosztásáról tárgyalnak.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 4 | 2 |
| $A_2$ | 3 | 7 | 4 | 7 |
| $A_3$ | 8 | 4 | 5 | 7 |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 |

**a)** Mennyi az a minimális összeg, melyet megfelelően szétosztva a nyolc vállalat között biztosítható, hogy minden pályázat benyújtható legyen? Modellezzük a feladatot alkalmas matematikai fogalmak használatával, majd válaszoljuk meg a kérdést (de ettől függetlenül is érdemes lehet az Egerváry-algorimtust lefuttatni a táblázaton). **(11 pont)**
**b)** Szét lehet osztani ezt az összeget úgy is, hogy az $A$ cégcsoport vállalatai összesítve ugyanannyi pénzt kapjanak, mint

a $B$ cégcsoport vállalatai? **(2 pont)**

*Megoldás:* **a)** Ha $c(x)$ jelöli az $x$ vállalat számára rendelkezésre bocsátott pénzösszeget és $w(A_iB_j)$ az $A_i$ és a $B_j$ vállalatok közös pályázatához szükséges önerőt, akkor a feltétel az, hogy $c(A_i)+c(B_j) \geq w(A_iB_j)$ minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén, azaz a $c$ függvény egy súlyozott lefogás legyen abban az élsúlyozott teljes páros gráfban, melynek csúcsosztályai $\{A_1, \dots, A_4\}$ és $\{B_1 \dots, B_4\}$, és a $w$ függvény írja le az élsúlyokat. Tehát ebben a gráfban kell minimális összsúlyú súlyozott lefogást keresnünk. **(2 pont)**
Egerváry tétele szerint ez a mennyiség éppen a gráf egy maximális súlyú teljes párosításának összsúlyával egyenlő, tehát a magyar módszer kiválóan alkalmazható a kérdéses mennyiség megtalálására.
Kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximok, azaz $8, 8, 6, 7$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. **(1 pont)**
Ha lehet, növeljük a párosítást javító úton (a fedetlen oszlopokból indulva alternáló utat keresünk valamely fedetlen sorba; ha találunk ilyet, annak mentén cseréljük a párosításban szereplő / nem szereplő éleket), **(2 pont)**
ha nem, csökkentjük a lefogás őszsúlyát (a fedetlen oszlopokból javító úton elérhető oszlopok, ill. sorok súlyait csökkentve, ill. növelve). **(2 pont)**
Az algoritmus lépései alább láthatók, a helyes kivitelezésükért a számolásra összesen 2 pont jár. Ha nem található javító út, az alternáló úton elért oszlopokat és sorokat nyilak jelzik, a javító utat piros szín.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 4 | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | **7** | 4 | **7** | 0 |
| $A_3$ | **8** | 4 | **5** | **7** | 0 |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 |
| | 8 | 7 | 5 | 7 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 4 | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 0 |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 0 |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 |
| | 8 | 7 | 5 | 7 | |

| | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 3 | 4 | 4 | 2 | 0 | |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 0 | $\leftarrow$ |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 0 | $\leftarrow$ |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 | |
| | 8 | 7 | 5 | 7 | | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | **4** | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 1 |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 1 |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 |
| | 7 | 6 | 4 | 6 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | $\boxed{\mathbf{4}}$ | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 1 |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 1 |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 |
| | 7 | 6 | 4 | 6 | |

| | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 3 | 4 | $\boxed{\mathbf{4}}$ | 2 | 0 | |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 1 | $\leftarrow$ |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 1 | $\leftarrow$ |
| $A_4$ | 6 | 5 | 1 | 3 | 0 | |
| | 7 | 6 | 4 | 6 | | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | $\boxed{\mathbf{4}}$ | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 4 | **7** | 2 |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | 5 | **7** | 2 |
| $A_4$ | **6** | **5** | 1 | 3 | 0 |
| | 6 | 5 | 4 | 5 | |

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | $\boxed{\mathbf{4}}$ | 2 | 0 |
| $A_2$ | 3 | **7** | 4 | $\boxed{\mathbf{7}}$ | 2 |
| $A_3$ | $\boxed{\mathbf{8}}$ | 4 | **5** | **7** | 2 |
| $A_4$ | 6 | $\boxed{\mathbf{5}}$ | 1 | 3 | 0 |
| | 6 | 5 | 4 | 5 | |

**(2 pont)**

A kapott párosítás $(A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1, A_4B_2)$ összsúlya $8+5+4+7=24$, a kapott lefogás összsúlya $6+5+4+5+0+2+2+0=24$. A tanultak szerint bármely teljes párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint bármely súlyozott lefogás összsúlya, tehát a kapott teljes párosítás valóban maximális súlyú, a kapott lefogás minimális összsúlyú. (Érvelhetünk úgy is, hogy az órán tanultuk, hogy az Egerváry-algorimtus akkor áll meg, ha találtunk teljes párosítást pontos élekből, és ekkor a teljes párosítás max súlyú, az aktuális súlyozott lefogás pedig minimális.) **(2 pont)**
(Az algoritmus helyes futtatása tehát összesen **7 pont**ot ér; az első **5 pont** ebből akkor jár, ha a dolgozatból világosan kiderül, hogy a dolgozat írója az algoritmus lépéseit tudja és érti (akkor is megadható lehet, ha a lépések nincsenek szövegesen megfogalmazva, de a megtett lépések meggyőzően demonstrálják a szükséges ismeretek meglétét; ellenben az elmélet felidézése konkrét lépések megtétele nélkül nem ér pontot), a maradék **2 pont** a lépések helyes kivitelezésére adható (tehát pusztán számolási hibák miatt maximum kettő pont veszíthető). Az utolsó **2 pont** a konklúzió helyes levonására és indoklására jár. Bárhogyan máshogyan talált max súlyú teljes párosítás és minimális súlyú lefogás a helyes konklúzióval szintén **9 pont**ot érhet, de a teljes pontszámhoz precíz indoklás kell, amihez a szükséges fogalmak (pl. súlyozott lefogás) és tételek (Egerváry-tétel) ismerete világosan ki kell derüljön a dolgozatból.)
**b)** Igen, szét lehet osztani igazságosan, azaz $12+12$ felosztásban a pályázásokhoz szükséges induló 24 millió petákos

tőkét: az előző részfeladatban talált minimális súlyozásban minden oszlop súlyát kettővel csökkentve, és minden sor súlyát kettővel növelve továbbra is súlyozott lefogást kapunk (hiszen bármely él két végpontjának súlyösszege változatlan), és így $\sum_{i=1}^{4} c(A_i) = 4+3+2+3 = 12 = \sum_{i=1}^{4} c(B_i) = 2+4+4+2$. **(2 pont)**

---

**3.** Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert.
**a)** Döntsük el az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk is egy megoldást. **(12 pont)**
**b)** Van-e olyan megoldása a rendszernek, melyben $x_2 = -2$? **(2 pont)**

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\le 2 \\ -2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &\ge 10 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &\le 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 &\ge -3 \end{aligned}$$

*Megoldás:* **a)** Először is hozzuk sztenderd alakra (minden $\ge$ egyenlőtlenséget $\le$ alakúra írunk át negatív szorzó segítségével): **(1 pont)**

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\le 2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 &\le -10 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &\le 7 \\ -3x_1 + 6x_2 - 12x_3 &\le 3 \end{aligned}$$

A következőekben a kibővített együtthatómátrixszal dolgozunk úgy, ahogy az órán tanultuk: sorra elimináljuk a változókat úgy, hogy az adott változót nemnulla együtthatóval tartlamazó sorokat alkalmas nemnegatív számmal szorozva elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója $\pm 1$ legyen, majd az összes, az adott változót $+1$ együtthatóval tartalmazó sort összeadjuk az összes, az adott változót $-1$ együtthatóval tartalmazó sorral, és az eredményül kapott sorokat, valamint az adott változót 0 együtthatóval tartalmazó sorokat írjuk az új mátrixba. Ezt az eljárást folytatjuk, míg az összes változót elimináltuk, vagy tilos sort kapunk (minden együttható 0, de a jobboldal negatív). A mintamegoldásban az $x_1$, $x_2$, $x_3$ sorrendben elimináljuk a változókat. **(3 pont)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & 2 \\ 2 & -8 & 4 & -10 \\ -1 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & 6 & -12 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ **(2 pont)**

(Az utolsó előtti állapotban az $x_3$ együtthatója sohasem volt $-1$, így nem lehetett (és nem is kellett) sorösszegeket képezni, csak a nulla együtthatós sorok másolásával kaptuk az utolsó mátrixot.)
Mivel nem kaptunk tilos sort, a tanultak szerint az egyenlőtlenségrendszer megoldható. **(1 pont)**
(Az első **3 pont** arra jár, ha valaki az eljárás lépéseit ismeri és alkalmazni is tudja. Az előbbi kiderülhet szövegszerű megfogalmazásból, de annak híján az elvégzett lépésekből is; utóbbi a lépések kivitelezéséből látható. Aki felidézi ugyan a vonatkozó elméletet, de egyáltalán nem demonstrálja, hogy alkalmazni is képes azt a feladatra, az **0 pont**ot kap. A második **3 pont** a lépések helyes kivitelezésére és a megoldás létezésének megállapítására adható meg.)

A tanultak alapján úgy kaphatunk egy megoldást, ha a változól eliminálási sorrendjét megfordítva az adott változónak az eliminálását megelőző utolsó állapotnak megfelelően választunk megengedett értéket, majd ezt rögzítve haladunk tovább a következő változóra. **(2 pont)**
Az ötödik mátrix alapján az egyetlen feltételünk $x_3 \le 3$, válasszuk mondjuk az $x_3 = 0$ értéket. A negyedik mátrix alapján az $x_2$-t tartalmazó sorok $-x_2 \le 1$, $x_2 + x_3 = x_2 \le 2$, $-x_2 - x_3 = -x_2 \le -2$, ezeket összevetve $2 \le x_2 \le 2$, válasszuk tehát az $x_2 = 2$ értéket. Az $x_1$-re a második mátrixból kapott feltételek: $x_1 - 5_x 2 + 4x_3 = x_1 - 10 \le 2$, azaz $x_1 \le 12$; $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = x_1 - 8 \le -5$, azaz $x_1 \le 3$; $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -x_1 + 4 \le 1$, azaz $x_1 \ge 3$; végül $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -x_1 + 4 \le 1$, azaz $x_1 \ge 3$, ebből $x_1 = 3$ adódik. **(2 pont)**
(Az első **2 pont** annak jár, aki tudja és érti, hogy mit és hogyan kell számolni; a második **2 pont** a számolások maradéktalanul helyes kivitelezésére adható meg.)
**b)** Behelyettesítve $x_2 = -2$-t, az első és az ötödik egyenlőtlenségből (egyszerűsítve) $x_1 + 10 + 4x_3 \le 2$, azaz $x_1 + 4x_3 \le -8$, valamint $x_1 + 4 + 4x_3 \ge -1$, azaz $x_1 + 4x_3 \ge -5$ adódik, ami ellentmondás, tehát nincs olyan megoldás, ahol $x_2 = -2$. **(2 pont)**

(Természetesen a FM-elimináció során az $x_2$ változót utolsóként eliminálva is megkaphatjuk ugyanezt az eredményt, hiszen abból $x_2 \geq -1$ adódik.)

---

**4.** Tekintsük az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$x, y \geq 0$$
$$2x + 5y \leq 125$$
$$3x + y \leq 51$$

**a)** Határozzuk meg a feltételeknek eleget tevő síkbeli $(x, y)$ pontok által alkotott $P$ sokszögtartomány csúcsait. **(6 pont)**
**b)** A $P$ minden csúcsához adjunk olyan célfüggvényt a fenti feltételek mellé, melyre az adott csúcs az egyetlen optimális megoldás. Ha ez valamely csúcsra nem lehetséges, indokoljuk meg, miért ez a helyzet. **(6 pont)**

*Megoldás:* **a)** A nemnegativitási feltételek utáni két feltételre $F1$, $F2$-ként hivatkozunk; egyúttal ezek fogják jelölni a feltételekből adódó félsíkok határoló egyeneseit (a feltételt egyenlőséggel teljesítő pontok halmazát) is.
Meghatározzuk a poliédert (a feltételeket kielégítő $(x, y)$ pontok halmazát a síkon), a csúcsok a feltételek határegyeneseinek metszéspontjaiból kerülnek ki. Az $x = 0$ tengellyel a metszéspontok: $F1 : (0, 25)$, $F2 : (0, 51)$ ezek közül az első van a poliéderben (a második nem teljesíti $F1$-et: behelyettesítve $F1$-be $2 \cdot 0 + 5 \cdot 51 > 125$). **(2 pont)**
Az $y = 0$ tengellyel a metszéspontok: $F1 : (62.5, 0)$, $F2 : (17, 0)$. Ezek közül az utolsó van a poliéderben (az első nem teljesíti $F2$-t, mert abba behelyettesítve $3 \cdot 62.5 + 0 > 51$ nyilvánvaló). **(2 pont)**
A két lineáris feltétel metszéspontja: $F1 \cap F2 = (10, 21)$, ez nyilván teljesít minden feltételt, tehát csúcs lesz. **(1 pont)**
Ne feledkezzünk meg a $(0, 0)$ csúcsról sem, mely a két nemnegativitási feltétel metszete (és persze teljesíti $F1$-et és $F2$-t). **(1 pont)**
Összefoglalva a poliéderünk csúcsai $(0, 0)$, $(0, 25)$, $(10, 21)$ és $(17, 0)$. **(0 pont)**
**b)** A tanultak szerint bármely célfüggvény fölveszi a maximumát a poliéder valamely csúcsában (és esetleg egy oldalél belső pontjaiban is), **(1 pont)**
tehát elég a jelöltjeinkre egy-egy alkalmas célfüggvényt találni, és annak értékét kiszámolni a csúcsokban; ha a kiszemelt csúcs az egyedüli optimum, akkor van sikeresen találtunk megfelelő célfüggvényt. Segít, ha a geometriai interpretációból merítünk ihletet: olyan támaszegyeneseket kell keresni, ami a poliédert a kiszemelt csúcsban érinti. Akárhogy is, könnyen találunk minden csúcshoz megfelelő célfüggvényt, ezek lehetnek például:
a $(0, 0)$ csúcsra a $\min(x + y)$ (avagy $\max(-x - y)$, de szabad minimalizálni is) **(2 pont)**
a $(0, 25)$ csúcsra a $\max y$ **(1 pont)**
a $(10, 21)$ csúcsra a $\max x + y$ **(1 pont)**
a $(17, 0)$ csúcsra a $\max x$ **(1 pont)**

# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. ZH (2024.05.09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

**1.** A $H=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ alaphalmazt szeretnénk minél olcsóbban lefedni. A fedéshez az alábbi részhalmazokat használhatjuk, minden részhalmaz után a költsége áll:
$\{a,b\}$, 5; $\{a,b,e,f,g\}$, 12; $\{a,b,f\}$, 7; $\{a,c,e\}$, 6; $\{b,c,d,e\}$, 9; $\{c,e,f,g\}$, 10.
**a)** Állapítsuk meg, hogy az órán tanult mohó algoritmus mely részhalmazokkal és milyen költséggel tudja lefedni a $H$ halmazt. (Dokumentáljuk az algoritmus lépéseit is.) **(8 pont)**
**b)** Optimális-e a kapott megoldás? **(2 pont)**

*Megoldás:* **a)** A mohó algoritmus futtatásához készítünk egy táblázatot, melyben az oszlopok a választható részhalmazoknak felelnek meg, és minden sorba felírjuk az adott részhalmaz által újonnan fedett elemeinek fajlagos költségét (azaz a halmaz költségét elosztjuk a részhalmazban levő, jelenleg még fedetlen elemek számával). A minimális fajlagos költségű részhalmazt bevesszük a fedésbe (ezt keretezés fogja jelezni); ennek az elemei tehát már le lesznek fedve, így a fajlagos költségeket újra kell számolni, ezt fogja tartalmazni a következő sor. (Ha egy részhalmaznak már minden eleme le van fedve, azt nincs értelme bevenni; ennek tényét kihúzással jelöljük.) Ezt addig ismételjük, míg a kiválasztott részhalmazok együttesen az alaphalmaz összes elemét le nem fedik. **(3 pont)**

| részhalmaz és költsége | $\{a,b\}$, 5 | $\{a,b,e,f,g\}$, 12 | $\{a,b,f\}$, 7 | $\{a,c,e\}$, 6 | $\{b,c,d,e\}$, 9 | $\{c,e,f,g\}$, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. lépés, fajlagos ktsg-ek | 5/2 | 12/5 | 7/3 | $\boxed{2}$ | 9/4 | 10/4 |
| 2. lépés, fajlagos ktsg-ek | 5 | 4 | $\boxed{7/2}$ | – | 9/2 | 5 |
| 3. lépés, fajlagos ktsg-ek | – | 12 | – | – | $\boxed{9}$ | 10 |
| 4. lépés, fajlagos ktsg-ek | – | 12 | – | – | – | $\boxed{10}$ |

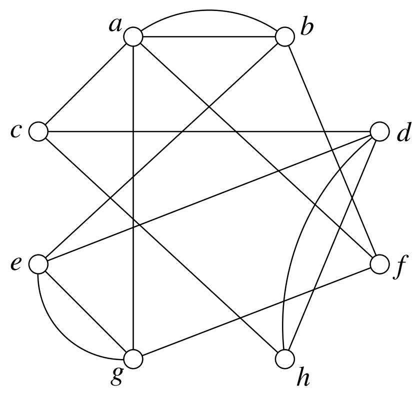
**(3 pont)**

A mohó algoritmus tehát az $\{a,c,e\}$ és a $\{a,b,f\}$, $\{b,c,d,e\}$ és $\{c,e,f,g\}$ részhalmazokat veszi be a fedésbe, összesen $6+7+9+10=32$ költséggel. Ezek persze valóban lefedik az alaphalmazt. **(2 pont)**

**b)** A talált fedés közel sem optimális, hiszen az $\{a,b,e,f,g\}$ és a $\{b,c,d,e\}$ részhalmazok 21 költséggel is lefedik az alaphalmazt. **(2 pont)**
(De az is szembetűnő lehet, hogy a mohó eljárás által kiválasztott részhalmazok közül pl. az $\{a,c,e\}$ elhagyásával továbbra is fedést kapunk, és persze olcsóbbat, így az eredeti nyilván nem volt optimális.)

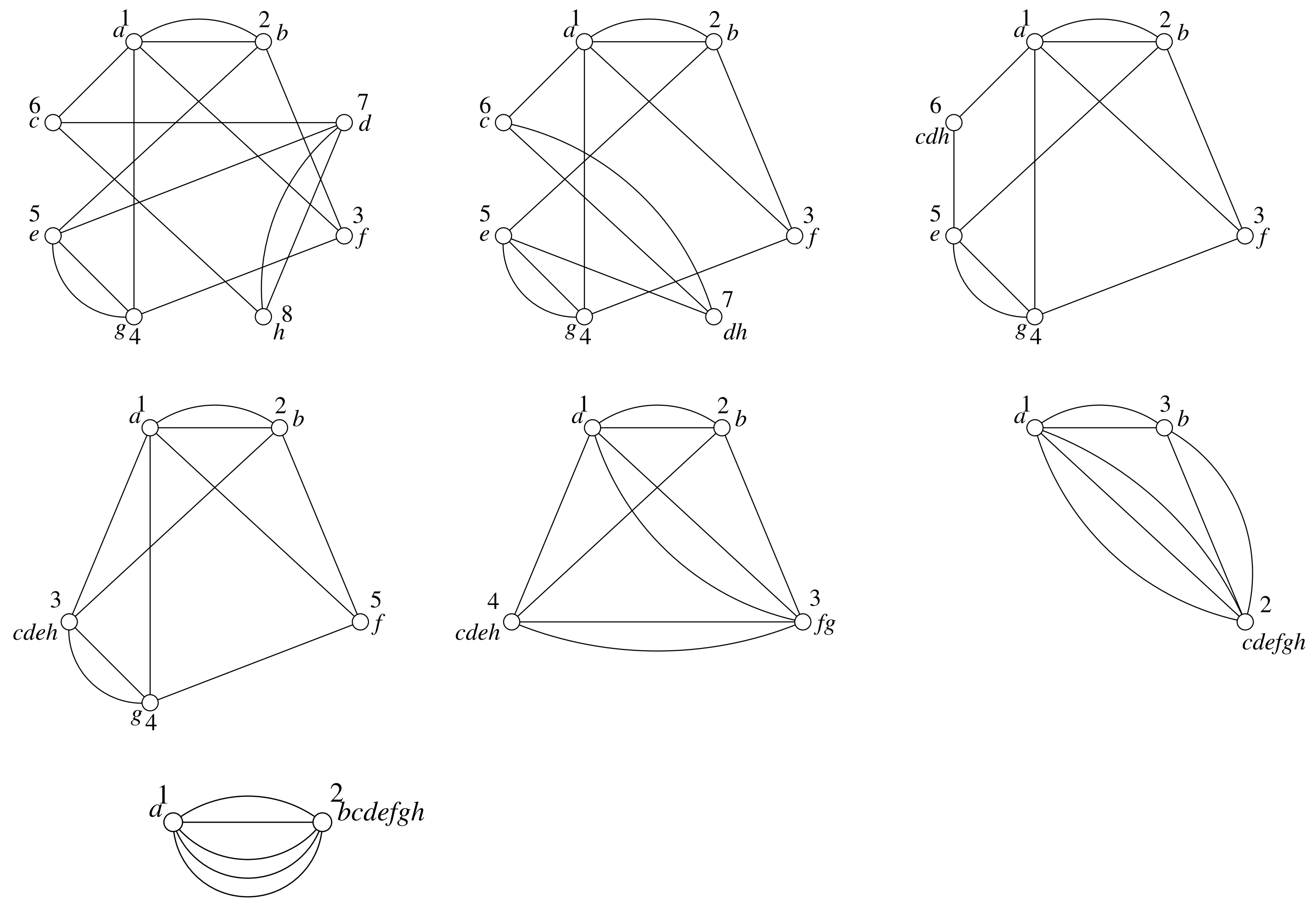
---

**2. a)** Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcs közül is lehet választani, akkor mindig azt választjuk, amelyik betűrendbe sorolva a legelső közülük. **(9 pont)**
**b)** Van-e olyan maxvissza sorrendje a csúcsoknak, melyben a két utolsó csúcs $c$ és $e$ (valamilyen sorrendben)? **(5 pont)**




**Nagyon figyeljünk oda a gráf átrajzolásának és az algoritmus lépéseinek pontos kivitelezésére, mert könnyű elrontani!**

*Megoldás:* **a)** Minden lépésben maxvissza sorrendet keresünk, ügyelve a betűrendiségre is olyankor, amikor több lehetőségünk is van. A maxvissza sorrendben utolsó két csúcsot összeolvasztjuk, az esetlegesen keletkező hurokéleket töröljük, majd ismételjük az eljárást, míg már csak két csúcsunk marad. **(3 pont)**
Az algoritmus lépései az alábbi ábrákon láthatók.




**(3 pont)**

Az órán tanultak alapján az eredeti gráf egy minvágása előáll az algoritmus valamelyik lépésében úgy, mint a maxvissza sorrendben utolsó csúcsból induló élek halmaza. Az utolsó csúcsok fokszámai sorrendben 3, 3, 2, 3, 4, 4, 5, tehát a legkisebb szóba jövő vágás a harmadik lépésben előálló, a *cdh* csúcsból induló élekből álló kételemű vágás, ami az eredeti gráfban a $\{c,d,h\}$ halmazból kilépő *ca* és *de* éleknek felel meg. Tehát a *ca*, *de* élek minvágást alkotnak a gráfban. **(3 pont)**

**b)** Ha volna ilyen maxvissza sorrend, akkor a tanultak szerint a *c* és *e* csúcsokat elvágó élek minimális száma, $\lambda(c,e)$ megegyezne az utolsó csúcs, azaz *c* vagy *e* fokával, így $\lambda(c,e) \geq 3$ volna. **(2 pont)**
Node az előző részfeladatban talált kételemű (minimális) vágás elvágja *c*-t és *e*-t (elhagyva a *ca* és *de* éleket *c* és *e* különböző komponensekbe kerülnek), azaz $\lambda(c,e) \leq 2$. **(2 pont)**
Mivel ez lehetetlen, nincs ilyen maxvissza sorrend. **(1 pont)**

---

**3. a)** Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (hasonló formában)! **(8 pont)**

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1+x_2+2x_3+x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1-3x_2+2x_4 \leq 3\\
&x_1+x_2-3x_3+x_4 \geq -2\\
&-2x_2+x_3+2x_4 \geq 3\\
&x_1-x_2+2x_3+6x_4 = 2\\
&x_3,x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

**b)** Mutassuk meg, hogy az $x_1 = x_2 = -7/6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/3$ a primál feladat optimális megoldása, és az $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $y_3 = 3$ a duál feladat optimális megoldása. **(4 pont)**

*Megoldás:* **a)** Először hozzuk sztenderd alakra a rendszert. Mivel a célfüggvényben maximalizálunk, a lineáris feltételek $=$ és $\leq$ alakúak lehetnek (a nemnegativitási feltételek megmaradnak). Így a sztenderd alak az alábbi:

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1+x_2+2x_3+x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1-3x_2+2x_4\leq 3\\
&-x_1-x_2+3x_3-x_4\leq 2\\
&2x_2-x_3-2x_4\leq -3\\
&x_1-x_2+2x_3+6x_4=2\\
&x_3,x_4\geq 0
\end{aligned}$$

**(1 pont)**

A dualizálási ökölszabályok szerint a duális (DLP) feladat változói a primál (LP) feltételeinek (az együtthatómátrix sorainak) felelnek meg, **(1 pont)**

pontosan azon duál változók nemnegatívak, ahol a megfelelő primál feltételben egyenlőtlenség van, **(1 pont)**

mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP célfüggvényében minimalizálunk, az optimalizálandó mennyiség pedig a duál változóknak a primál feltételek jobb oldalaival vett kombinációja, **(1 pont)**

a DLP lineáris feltételeinek jobb oldalai a primál célfüggvény együtthatói, és mivel a DLP is sztenderd alakú, $=$ és $\geq$ relációk szerepelhetnek, **(1 pont)**

mégpedig pontosan a nemnegatív primál változóknak megfelelő duális feltételeknél lesz egyenlőtlenség. **(1 pont)**

Felrajzolhatjuk a szamárvezetőt is: **(1 pont)**

(itt az együtthatómátrix helyes megállapítására jár a pont)

$$\begin{array}{ll|rrrr|l}
 & & & & 0\leq & 0\leq & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
0\leq & y_1 & 1 & -3 & 0 & 2 & \leq 3\\
0\leq & y_2 & -1 & -1 & 3 & -1 & \leq 2\\
0\leq & y_3 & 0 & 2 & -1 & -2 & \leq -3\\
 & y_4 & 1 & -1 & 2 & 6 & =2\\
\hline
 & & = & = & \geq & \geq & \\
 & & 1 & 1 & 2 & 1 &
\end{array}$$

Ezek alapján a DLP:

$$\begin{aligned}
&\min\{3y_1+2y_2-3y_3+2y_4\}\\
&\text{ha}\\
&y_1-y_2+y_4=1\\
&-3y_1-y_2+2y_3-y_4=1\\
&3y_2-y_3+2y_4\geq 2\\
&2y_1-y_2-2y_3+6y_4\geq 1\\
&y_1,y_2,y_3,\geq 0
\end{aligned}$$

**(1 pont)**

(A DLP felírására járó részpontok annak járnak, aki a megfelelő dualizálás szabályt sikerrel alkalmazta (tehát a megfogalmazás önmagában nem ér pontot, de a megfogalmazás hiánya nem jelent okvetlen pontveszteséget.)

**b)** Az LP feltételeibe behelyettesítve az adott $x_1,\dots,x_4$ értékeket könnyen kiszámolhatjuk, hogy a megoldásjelöltünk mindegyiknek megfelel: a nemnegativitási feltételek triviálisak, a lineáris feltételek pedig épp egyenlőséggel teljesülnek. A DLP-nél hasonló a helyzet. **(1 pont)**

Kiszámolva a primál és a duál célfüggvények értékét az adott megoldásokra, mindkettőnél $-2$ adódik. **(1 pont)**

Mivel tetszőleges primál megoldásra a maximalizálandó célfüggvény értéke legföljebb annyi, mint tetszőleges duál megoldásra a minimalizálandó duál célfügvény értéke, **(1 pont)**

nincs olyan LP megoldás, mely $-2$-nél nagyobb, sem olyan DLP megoldás, mely $-2$-nél kisebb célfüggvényértéket eredményezne. **(1 pont)**

---

**4.** Egy logisztikai raktárban egy automata targonca tölti meg az áruszállító teherautókat különféle méretű ládákkal, melyek egy polc két szintjén helyezkednek el. Ha a soron következő láda nem férne be a várakozó teherautók egyikébe sem, akkor a láda mozgatása előtt a targonca hív egy új járművet, majd annak megérkezése után folytatja a rakodást

(így tesz például rögtön az elején, amikor még egy teherautó sincs ott). Minden teherautó kapacitása 100 egység. Az alsó polcon levő $a_1, \ldots, a_4$ ládák méretei 30, 60, 50, 40, míg a fölső polcon lévő $f_1, \ldots, f_4$ ládáké 40, 20, 20, 40 egység.
**a)** Hány teherautóra lesz szüksége a targoncának, ha az FFD algoritmus szerint pakolja a ládákat? **(6 pont)**

Előfordulhat, hogy az FFD algoritmus több láda közül is választhat. Ilyenkor a raktár rakodási protokollja szerint prioritást élveznek a fölső polcon levő ládák, illetve az azonos polcon levők közül a kisebb sorszámúak.
**b)** Az alsó polcon levő ládák átrakodási ideje 1 egység, a fölső polcon levőké 2 egység, új teherautó hívása esetén a várakozási idő 3 egység. Mennyi az előzőleg vizsgált, a raktári protokollnak megfelelő rakodás teljes átfutási ideje, illetve a ládák átpakolásának átlagos átfutási ideje? Lehet-e csökkenteni a teljes átfutási időt? **(8 pont)**

*Megoldás:* **a)** Az FFD eljárást követve a targonca mindig a legnagyobb elpakolandó ládát teszi az első teherautóba, melybe belefér (szükség esetén újat hív), azaz 60, 50, 40, 40, 40, 30, 20, 20 sorrendben helyezi el a ládákat. **(2 pont)**
Az egyes teherautókba rakott ládák méretei ezek alapján a következőképpen alakulnak: $T_1$: $60+40$; $T_2$: $50+40$; $T_3$: $40+30+20$; $T_4$: 20. **(3 pont)**
Tehát 4 teherautóra lesz szükség. **(1 pont)**
**b)** Részletezve az előző folyamatot, a műveletek sorrendje és a befejezési időpontjuk az alábbi:

| művelet | $T_1$ hív | $a_2 \to T_1$ | $T_2$ hív | $a_3 \to T_2$ | $f_1 \to T_1$ | $f_4 \to T_2$ | $T_3$ hív | $a_4 \to T_3$ | $a_1 \to T_3$ | $f_2 \to T_3$ | $T_4$ hív | $f_3 \to T_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bef. idő | 3 | 4 | 7 | 8 | 10 | 12 | 15 | 16 | 17 | 19 | 22 | 24 |

**(3 pont)**
A rakodás teljes átfutási ideje tehát 24 egység. **(1 pont)**
(Ez persze rögtön látszik abból is, hogy a 8 ládát $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$ egységnyi idő alatt rakodjuk át, és a 4 teherautóra $4 \cdot 3 = 12$ időegységet kell várni. Akinél hiányzik a pontos rakodási folyamat áttekintése, de helyesen meghatározza a teljes átfutási időt, az erre **2 pont**-ot kaphat.)
A ládák átlagos átrakodási ideje a 8 ládapakolási művelet befejezési időpontjainak átlaga (a teherautóhívások miatti várakozások miatt egyes ládák átrakodásának befejezési ideje kitolódik, de a teherautóhívás maga nem ládapakolási művelet), azaz $(4+8+10+12+16+17+19+24)/8$. **(2 pont)**
(Ez egyébként $110/8 = 13\frac{6}{8}$.) **(0 pont)**
A teljes átfutási idő az átrakodási műveletek, valamint a teherautóhívások összidőigényéből tevődnek össze. Az előbbi állandó ($4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$), az utóbbi azonban csökkenthető lehet, ha a ládák beférnek 3 teherautóba is. Márpedig beférnek, így: $T_1$: $60+40$; $T_2$: $50+30+20$; $T_3$: $40+40+20$. Tehát a válasz igen, a teljes átfutási idő csökkenthető (mégpedig 35-re). **(2 pont)**

# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. PZH (2024.05.27., 8:00-10:00, IB025)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

**1.** Legyen $H = \{a,b,c,d,e\}$ egy halmaz, $A_1 = \{a,c\}, c_1 = 6$, $A_2 = \{a,b,e\}, c_2 = 7$, $A_3 = \{b,c,d\}, c_3 = 8$, $A_4 = \{a,c,d,e\}, c_4 = 10$. A tanult halmazfedési problémára szeretnénk egy IP modellt adni. Tekintsük az alábbi IP feladatot az $x_1,\dots,x_4$ változókra:

$$\begin{aligned}
&\min\{6x_1+7x_2+8x_3+10x_4\}\\
&\text{ha}\\
&\forall i\in\{1,\dots,4\}:\ x_i\geq 0\\
&\forall i\in\{1,\dots,4\}:\ x_i\in\mathbb{Z}\\
&x_1+x_2+x_4\geq 1\\
&x_2+x_3\geq 1\\
&x_1+x_3+x_4\geq 1\\
&x_3+x_4\geq 1\\
&x_2+x_4\geq 1
\end{aligned}$$

**a)** Igazoljuk, hogy a fenti IP-nek van optimuma, és a célfüggvény optimális értéke éppen a fenti halmazokra és költségekre vonatkozó halmazfedési probléma optimális megoldásainak költsége. (Figyelem: nem kötöttük ki, hogy az $x_i$ változók legföljebb 1 értéket vehetnének föl.) **(6 pont)**
**b)** Írjuk föl a duális LP feladatot a primálhoz hasonló (egyenlőtlenségekkel felírt) formában. **(7 pont)**
**c)** Igaz-e, hogy a feladatban szereplő együtthatómátrix TU? **(3 pont)**

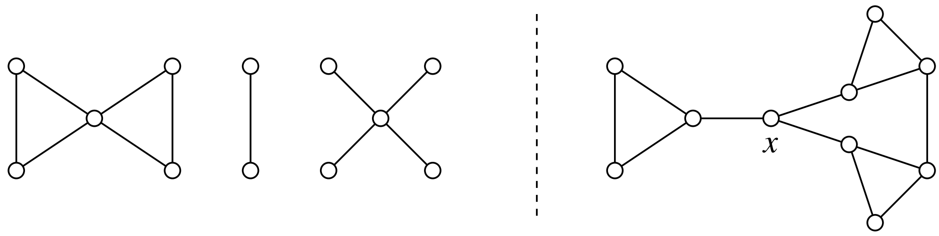
*Megoldás:* **a)** Mivel a 0 triviálisan alsó korlát a célfüggvényre, továbbá van megoldás (pl. az összes változó értékét 1-nek választva), a tanultak alapján van optimális megoldás. **(1 pont)**
Az $x_i$ változók optimális megoldásban sosem vesznek föl 1-nél nagyobb értéket, hiszen 1-re csökkentve ezeket még mindig megoldást kapnánk (a lineáris feltételek jobb oldalai csak 1-ek), és ez csökkentené a célfüggvény értékét. Emiatt az optimális megoldásokra $0 \leq x_i \leq 1$, az egészértékűség miatt $x_i \in \{0,1\}$. **(2 pont)**
Vegyük észre, hogy a ilneáris feltételek a $H$ halmaz egy-egy elemének felelnek meg: a $j$-edik feltétel pontosan a $j$-t tartalmazó részhalmazoknak megfelelő változók összegeiből áll. Egy (optimális) 0–1 megoldás esetén tehát minden $j \in H$ elemre a $j$-t tartalmazó $A_i$ részhalmazok közül legalább az egyik 1-es kell legyen. **(2 pont)**
Így az $x_i = 1$ változóknak megfelelő $A_i$ részhalmazokat kiválasztva a valóban fedést, optimális $x_i$ megoldásból minimális költségű fedést kapunk. **(1 pont)**
**b)** A feladat eleve sztenderd alakú, a további optimalizálási ökölszabályok helyes alkalmazására egy-egy pont jár, összesen **(7 pont)**.
Lebontva:
A dualizálási ökölszabályok szerint a duális (DLP) feladat változói a primál (LP) feltételeinek (az együtthatómátrix sorainak) felelnek meg, így 5 duál változónk van, **(1 pont)**
pontosan azon duál változók nemnegatívak, ahol a megfelelő primál feltételben egyenlőtlenség van, **(1 pont)**
mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP célfüggvényében minimalizálunk, az optimalizálandó mennyiség pedig a duál változóknak a primál feltételek jobb oldalaival vett kombinációja, **(1 pont)**
a DLP lineáris feltételeinek jobb oldalai a primál célfüggvény együtthatói, és mivel a DLP is sztenderd alakú, $=$ és $\geq$ relációk szerepelhetnek, **(1 pont)**
mégpedig pontosan a nemnegatív primál változóknak megfelelő duális feltételeknél lesz egyenlőtlenség. **(1 pont)**
Felrajzolhatjuk a szamárvezetőt is (itt az együtthatómátrix helyes megállapítására jár a pont), **(1 pont)**
végül felírjuk a DLP-t egyenlőtleségekkel. **(1 pont)**
A kapott DLP a következő:

$$\begin{aligned}
&\max\{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\}\\
&\text{ha}\\
&\forall i\in\{1,\dots,5\}:\ y_i\ge 0\\
&y_1+y_3\le 6\\
&y_1+y_2+y_5\le 7\\
&y_2+y_3+y_4\le 8\\
&y_1+y_3+y_4+y_5\le 10
\end{aligned}$$

**c)** Nem. Könnyen látható, hogy az IP optimuma 15 (az $A_2$ és az $A_3$ halmazokat választva), **(1 pont)**
de (mivel az $A_2$, $A_3$ és $A_4$ halmazokban $H$ minden eleme pontosan kétszer szerepel, így) az $x_1=0$, $x_2=x_3=x_4=\frac{1}{2}$ is megoldás, és a célfüggvény értéke erre 12,5, tehát az LP optimum kisebb, mint az IP optimum, **(1 pont)**
így a tanult tételek alapján a mátrix nem lehet TU (különben a két optimum egybeesne). **(1 pont)**

---

**2.** Legkevesebb hány élt kell behúzni az alábbi ábra bal oldalán látható gráfba úgy, hogy a kapott gráf kétszeresen összefüggő legyen? Mutassunk is példát megfelelő (és minimális számú) élek behúzására. **(12 pont)**




*Megoldás:* A tanult képlet alapján a keresett mennyiség $\max\left\{b(G)-1, \left\lfloor\frac{m(G)+2m'(G)}{2}\right\rfloor\right\}$, ahol a $b(G)$ az egy csúcs törlése után kapott gráf összefüggőségi komponenseinek maximális száma, $m(G)$ a levélblokkok (egy darab elvágó csúcsot tartalmazó maxblokkok) száma, $m'(G)$ pedig az izolált blokkok (elvágó csúcsot nem tartalmazó maxblokkok) száma. **(3 pont)**
A jobb oldali komponens középső csúcsát törölve a kapott gráfnak 6 komponense lesz (bármely más csúcsot törölve legfeljebb 4), így $b(G)=6$, tehát $b(G)-1=5$. **(3 pont)**
A levélblokkok, illetve az izolált blokkok száma $m(G)=6$, $m'(G)=1$ (a bal oldali komponens két $K_3$ blokkot tartalmaz, ezek levélblokkok, a középső komponens egy blokkból áll, ami izolált blokk, a jobb oldali pedig négy darab $K_2$ blokkból áll, mind levélblokk), így maximumban szereplő második tag $(6+2)/2=4$. **(2 pont)**
Ezek alapján 5 él behúzására van szükség, és ennyi elegendő is. **(1 pont)**
És valóban, öt élt be lehet úgy húzni, hogy a kapott gráf 2-összefüggő legyen. Jó példa esetén jár **(3 pont)**.

---

**3.** Tekintsük a fenti ábra jobb oldalán található gráfot. Van-e a csúcsainak olyan maxvissza sorrendje, melyben az utolsó csúcs $x$? **(10 pont)**

*Megoldás:* Ha volna ilyen sorrend, és abban az utolsó előtti csúcs $v$ volna ($v\neq x$), akkor a tanult lemma alapján $\lambda(x,v)=d(x)=3$ volna. **(4 pont)**
Azonban $x$ bármely más csúcstól elvágható legföljebb 2 él elhagyásával: a tőle balra levő csúcsoktól egy darab (az $x$-ből balra induló) él elhagyásával is elvágható, a tőle jobbra levőktől pedig a két darab (az $x$-ből jobbra induló) él elhagyásával. **(4 pont)**
Emiatt $d(x,v)\le 2$ bármely $v\in V(G)$-re, tehát $x$ nem lehet utolsó semelyik maxvissza sorrendben. **(2 pont)**

---

**4.** A $J_1,\dots,J_{10}$ munkák megmunkálási ideje rendre $5,8,3,2,6,10,5,5,4,2$.
**a)** Ütemezzük a munkákat két (egyforma) gépre listás ütemezéssel LPT sorrendben. **(4 pont)**
**b)** Mennyi a kapott ütemezés átfutási ideje, illetve átlagos átfutási ideje? **(4 pont)**
**c)** Döntsük el, hogy a kapott átfutási idő, illetve átlagos átfutási idő optimális-e. (Ez két, külön kérdés, és mindkettőre meg is kell indokolni a választ.) **(4 pont)**

*Megoldás:* **a)** A munkákat időigényük szerint csökkenő sorrendben végezzük a két gépen, mindig az első szabad gépre ütemezve a soron következő munkát. **(2 pont)**
Az ütemezés eredménye (megmunkálási idők alapján, utána zárójelben az adott munka befejezési (átfutási) ideje):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M1: | 10 (10) | 5 (15) | 5 (20) | 3 (23) | 2 (25) |
| M2: | 8 (8) | 6 (14) | 5 (19) | 4 (23) | 2 (25) |

**(2 pont)**

**b)** Az átfutási idő 25, mivel mindkét gép ekkor fejezi be a rá ütemezett munkákat. **(1 pont)**

Az átlagos átfutási idő az egyes munkák befejezési idejeinek összege elosztva a munkák számával, **(1 pont)**
azaz

$$\frac{(10+15+20+23+25)+(8+14+19+23+25)}{10}$$

**(2 pont)**

ami amúgy $182/10 = 18,2$. **(0 pont)**

**c)** Az átfutási idő optimális, hiszen a 10 munka összes megmunkálási ideje 50, tehát a hosszabb ideig dolgozó gép leállási ideje (azaz az átfutási idő) legalább 25. **(2 pont)**

Az átlagos átfutási idő nem optimális, például az első gépen az első két munkát (10 és 5 hosszúak) fölcserélve a kifejezésben szereplő számláló elején $10+15$ helyett $5+15$ fog állni, tehát az átlagos átfutási idő csökkenthető (jelentősebb mértékben is, például (gépenként) SPT sorrendet véve). **(2 pont)**