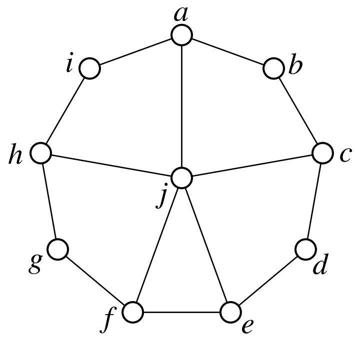
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH (2024.04.08.)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. Egy tíz fős cég munkatársai csapatépítés céljából szabadulószobázni mennek. Az ismeretségek elmélyítése érdekében azok a munkatárak, akiknek már volt közös projektjük, nem mehetnek ugyanabba a szobába. A jobbra látható gráf csúcsai reprezentálják a cég dolgozóit, és két csúcs közt akkor van él, ha a megfelelő személyeknek már volt közös projektje. A négy szabadulószobát üzemeltető vállalkozó valamilyen sorrendben haladva, egymás után osztja be a résztvevőket: az éppen aktuális delikvenst beküldi az első olyan szobába, ahol még nincs olyan kolléga, akivel volt közös projektje. Előfordulhat-e az, hogy a vállalkozó…



a) …csak az első három szobába küldi a tíz résztvevőt? **(3 pont)**

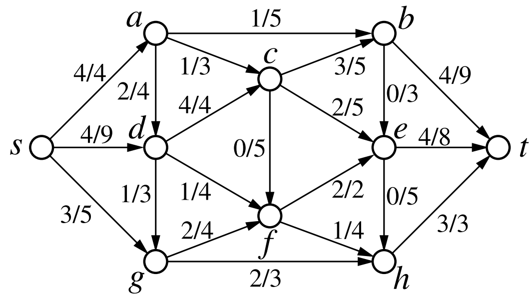
b) …mind a négy szobába küld valakit? **(3 pont)**

c) …bajba kerül, mert szüksége volna egy ötödik szobára a beosztáshoz? **(6 pont)**

(Javaslat: fogalmazzunk meg egy matematikai modellt, és abban válaszoljuk meg a három kérdést.)

---

2. Az ábrán egy hálózat látható; az élekre írt a/b alakú kifejezésben az első szám (a) egy st-folyam értéke az adott élen, a második szám (b) pedig az él kapacitása.



a) Döntsük el, hogy a megadott folyam maximális st-folyam-e. Ha igen, mutassunk erre bizonyítékot; ha nem, akkor módosítsuk a folyamot úgy, hogy maximális st-folyamot kapjunk (és persze a módosított folyam maximalitását se feledjük el igazolni). **(7 pont)**

b) Egyetlen él irányításának megfordítására van lehetőségünk. Úgy szeretnénk ezt megtenni, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen. Mennyivel lehetséges ilymódon megnövelni a maximális folyamnagyságot? (Ha azt állítjuk, hogy a válasz p, akkor mutassunk élt, melynek megfordításával valóban p-vel nő a maximális folyamnagyság, és indokoljuk meg, hogy semelyik él megfordításával sem nő p-nél többel.) **(7 pont)**

---

3. Az oldalt látható mátrix az $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az A_iB_j él súlya az A_i indexű sor és a B_j indexű oszlop metszetében álló szám.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	8	5	6
A_2	4	7	3	4
A_3	5	6	3	5
A_4	7	8	6	7

a) Van-e olyan maximális súlyú párosítás a gráfban, melyben az A_1B_2 és az A_4B_1 él is szerepel? **(3 pont)**

b) Adjuk meg a gráf egy maximális súlyú párosítását és egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. **(9 pont)**

---

4. Oldjuk meg az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max 5x + 6y,\ \text{ha}& \\ x, y &\geq 0 \\ x + 4y &\leq 50 \\ 4x + 5y &\leq 90 \\ 3x + 2y &\leq 57 \end{aligned}$$

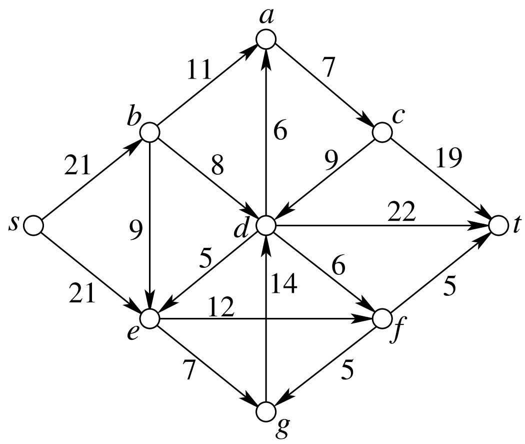
(12 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. PZH (2024.04.24. 18-20, E1C)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. Keressünk maximális *st* folyamot és minimális *st* vágást az ábrán látható hálózatban (és ne felejtsük el megindokolni, hogy az adott folyam / vágás miért maximális / minimális). **(11 pont)**



2. A piréz A és a pritek B cégcsoport egyaránt négy-négy vállalattal rendelkezik ($A_1, \dots, A_4$ és $B_1, \dots, B_4$). A piréz-pritek kétoldalú támogatások minél sikeresebb kiaknázása érdekében minden A_iB_j vállalatpár beadna egy-egy pályázatot ($1 \le i, j \le 4$), melyekhez a szükséges együttes önerő mértékét a mellékelt táblázat tartalmazza (millió petákban értve). A pályázatok beadásának feltétele, hogy a két pályázó vállalat együttesen rendelkezzen a szükséges önerővel (ez pályázatonként külön-külön teljesítendő; azt nem vizsgálja senki, hogy ha egy vállalat esetleg több nyertes pályázatban is szerepelne, akkor az összeshez elő tudná-e teremteni a megfelelő önerőt a partnereivel). Emaitt a cégcsoportok vezetői az egyes vállalatok számára rendelkezésre bocsátandó pénzösszegek szétosztásáról tárgyalnak.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	4	2
A_2	3	7	4	7
A_3	8	4	5	7
A_4	6	5	1	3

a) Mennyi az a minimális összeg, melyet megfelelően szétosztva a nyolc vállalat között biztosítható, hogy minden pályázat benyújtható legyen? Modellezzük a feladatot alkalmas matematikai fogalmak használatával, majd válaszoljuk meg a kérdést (de ettől függetlenül is érdemes lehet az Egerváry-algorimtust lefuttatni a táblázaton). **(11 pont)**

b) Szét lehet osztani ezt az összeget úgy is, hogy az A cégcsoport vállalatai összesítve ugyanannyi pénzt kapjanak, mint a B cégcsoport vállalatai? **(2 pont)**

3. Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\le 2 \\ -2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &\ge 10 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &\le 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 &\ge -3 \end{aligned}$$

a) Döntsük el az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk is egy megoldást. **(12 pont)**

b) Van-e olyan megoldása a rendszernek, melyben $x_2 = -2$? **(2 pont)**

4. Tekintsük az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{aligned} x, y &\ge 0 \\ 2x + 5y &\le 125 \\ 3x + y &\le 51 \end{aligned}$$

a) Határozzuk meg a feltételeknek eleget tevő síkbeli (x, y) pontok által alkotott P sokszögtartomány csúcsait. **(6 pont)**

b) A P minden csúcsához adjunk olyan célfüggvényt a fenti feltételek mellé, melyre az adott csúcs az egyetlen optimális megoldás. Ha ez valamely csúcsra nem lehetséges, indokoljuk meg, miért ez a helyzet. **(6 pont)**

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

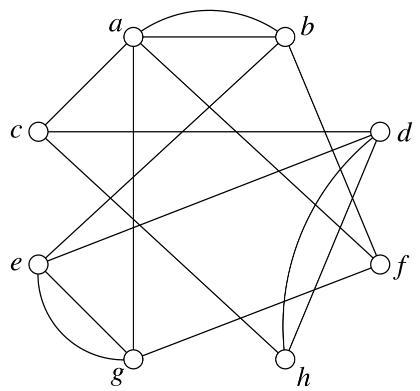
2. ZH (2024.05.09.)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. A $H = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ alaphalmazt szeretnénk minél olcsóbban lefedni. A fedéshez az alábbi részhalmazokat használhatjuk, minden részhalmaz után a költsége áll:
$\{a,b\}$, 5; $\{a,b,e,f,g\}$, 12; $\{a,b,f\}$, 7; $\{a,c,e\}$, 6; $\{b,c,d,e\}$, 9; $\{c,e,f,g\}$, 10.
a) Állapítsuk meg, hogy az órán tanult mohó algoritmus mely részhalmazokkal és milyen költséggel tudja lefedni a H halmazt. (Dokumentáljuk az algoritmus lépéseit is.) **(8 pont)**
b) Optimális-e a kapott megoldás? **(2 pont)**

---

2. a) Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcs közül is lehet választani, akkor mindig azt választjuk, amelyik betűrendbe sorolva a legelső közülük. **(9 pont)**
b) Van-e olyan maxvissza sorrendje a csúcsoknak, melyben a két utolsó csúcs c és e (valamilyen sorrendben)? **(5 pont)**



Nagyon figyeljünk oda a gráf átrajzolásának és az algoritmus lépéseinek pontos kivitelezésére, mert könnyű elrontani!

---

3. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (hasonló formában)! **(8 pont)**

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - 3x_2 + 2x_4 \leq 3\\
&x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -2\\
&-2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2\\
&x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = x_2 = -7/6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/3$ a primál feladat optimális megoldása, és az $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $y_3 = 3$ a duál feladat optimális megoldása. **(4 pont)**

---

4. Egy logisztikai raktárban egy automata targonca tölti meg az áruszállító teherautókat különféle méretű ládákkal, melyek egy polc két szintjén helyezkednek el. Ha a soron következő láda nem férne be a várakozó teherautók egyikébe sem, akkor a láda mozgatása előtt a targonca hív egy új járművet, majd annak megérkezése után folytatja a rakodást (így tesz például rögtön az elején, amikor még egy teherautó sincs ott). Minden teherautó kapacitása 100 egység. Az alsó polcon levő $a_1, \ldots, a_4$ ládák méretei 30, 60, 50, 40, míg a fölső polcon lévő $f_1, \ldots, f_4$ ládáké 40, 20, 20, 40 egység.
a) Hány teherautóra lesz szüksége a targoncának, ha az FFD algoritmus szerint pakolja a ládákat? **(6 pont)**

Előfordulhat, hogy az FFD algoritmus több láda közül is választhat. Ilyenkor a raktár rakodási protokollja szerint prioritást élveznek a fölső polcon levő ládák, illetve az azonos polcon levők közül a kisebb sorszámúak.
b) Az alsó polcon levő ládák átrakodási ideje 1 egység, a fölső polcon levőké 2 egység, új teherautó hívása esetén a várakozási idő 3 egység. Mennyi az előzőleg vizsgált, a raktári protokollnak megfelelő rakodás teljes átfutási ideje, illetve a ládák átpakolásának átlagos átfutási ideje? Lehet-e csökkenteni a teljes átfutási időt? **(8 pont)**

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. PZH (2024.05.27., 8:00-10:00, IB025)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. Legyen $H = \{a,b,c,d,e\}$ egy halmaz, $A_1 = \{a,c\}, c_1 = 6$, $A_2 = \{a,b,e\}, c_2 = 7$, $A_3 = \{b,c,d\}, c_3 = 8$, $A_4 = \{a,c,d,e\}, c_4 = 10$. A tanult halmazfedési problémára szeretnénk egy IP modellt adni. Tekintsük az alábbi IP feladatot az $x_1,\ldots,x_4$ változókra:

$$\begin{aligned}
&\min\{6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4\}\\
&\text{ha}\\
&\forall i \in \{1,\ldots,4\} : x_i \geq 0\\
&\forall i \in \{1,\ldots,4\} : x_i \in \mathbb{Z}\\
&x_1 + x_2 + x_4 \geq 1\\
&x_2 + x_3 \geq 1\\
&x_1 + x_3 + x_4 \geq 1\\
&x_3 + x_4 \geq 1\\
&x_2 + x_4 \geq 1
\end{aligned}$$

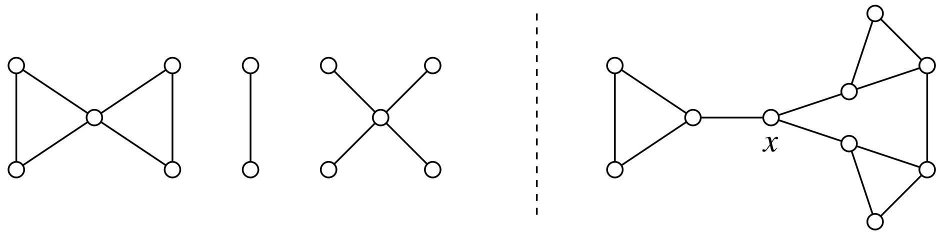
a) Igazoljuk, hogy a fenti IP-nek van optimuma, és a célfüggvény optimális értéke éppen a fenti halmazokra és költségekre vonatkozó halmazfedési probléma optimális megoldásainak költsége. (Figyelem: nem kötöttük ki, hogy az x_i változók legföljebb 1 értéket vehetnének föl.) **(6 pont)**

b) Írjuk föl a duális LP feladatot a primálhoz hasonló (egyenlőtlenségekkel felírt) formában. **(7 pont)**

c) Igaz-e, hogy a feladatban szereplő együtthatómátrix TU? **(3 pont)**

---

2. Legkevesebb hány élt kell behúzni az alábbi ábra bal oldalán látható gráfba úgy, hogy a kapott gráf kétszeresen összefüggő legyen? Mutassunk is példát megfelelő (és minimális számú) élek behúzására. **(12 pont)**



---

3. Tekintsük a fenti ábra jobb oldalán található gráfot. Van-e a csúcsainak olyan maxvissza sorrendje, melyben az utolsó csúcs x? **(10 pont)**

---

4. A $J_1,\ldots,J_{10}$ munkák megmunkálási ideje rendre $5,8,3,2,6,10,5,5,4,2$.

a) Ütemezzük a munkákat két (egyforma) gépre listás ütemezéssel LPT sorrendben. **(4 pont)**

b) Mennyi a kapott ütemezés átfutási ideje, illetve átlagos átfutási ideje? **(4 pont)**

c) Döntsük el, hogy a kapott átfutási idő, illetve átlagos átfutási idő optimális-e. (Ez két, külön kérdés, és mindkettőre meg is kell indokolni a választ.) **(4 pont)**