Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. PZH (2024.05.27., 8:00-10:00, IB025)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Legyen $H = \{a,b,c,d,e\}$ egy halmaz, $A_1 = \{a,c\}, c_1 = 6$, $A_2 = \{a,b,e\}, c_2 = 7$, $A_3 = \{b,c,d\}, c_3 = 8$, $A_4 = \{a,c,d,e\}, c_4 = 10$. A tanult halmazfedési problémára szeretnénk egy IP modellt adni. Tekintsük az alábbi IP feladatot az $x_1,\dots,x_4$ változókra:

$$\begin{aligned}
&\min\{6x_1+7x_2+8x_3+10x_4\}\\
&\text{ha}\\
&\forall i \in \{1,\dots,4\}: x_i \geq 0\\
&\forall i \in \{1,\dots,4\}: x_i \in \mathbb{Z}\\
&x_1+x_2+x_4 \geq 1\\
&x_2+x_3 \geq 1\\
&x_1+x_3+x_4 \geq 1\\
&x_3+x_4 \geq 1\\
&x_2+x_4 \geq 1
\end{aligned}$$

a) Igazoljuk, hogy a fenti IP-nek van optimuma, és a célfüggvény optimális értéke éppen a fenti halmazokra és költségekre vonatkozó halmazfedési probléma optimális megoldásainak költsége. (Figyelem: nem kötöttük ki, hogy az x_i változók legföljebb 1 értéket vehetnének föl.) **(6 pont)**
b) Írjuk föl a duális LP feladatot a primálhoz hasonló (egyenlőtlenségekkel felírt) formában. **(7 pont)**
c) Igaz-e, hogy a feladatban szereplő együtthatómátrix TU? **(3 pont)**

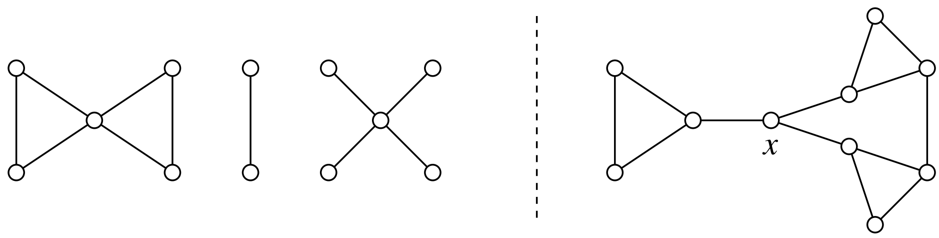
Megoldás: **a)** Mivel a 0 triviálisan alsó korlát a célfüggvényre, továbbá van megoldás (pl. az összes változó értékét 1-nek választva), a tanultak alapján van optimális megoldás. **(1 pont)**
Az x_i változók optimális megoldásban sosem vesznek föl 1-nél nagyobb értéket, hiszen 1-re csökkentve ezeket még mindig megoldást kapnánk (a lineáris feltételek jobb oldalai csak 1-ek), és ez csökkentené a célfüggvény értékét. Emiatt az optimális megoldásokra $0 \leq x_i \leq 1$, az egészértékűség miatt $x_i \in \{0,1\}$. **(2 pont)**
Vegyük észre, hogy a ilneáris feltételek a H halmaz egy-egy elemének felelnek meg: a j-edik feltétel pontosan a j-t tartalmazó részhalmazoknak megfelelő változók összegeiből áll. Egy (optimális) 0–1 megoldás esetén tehát minden $j \in H$ elemre a j-t tartalmazó A_i részhalmazok közül legalább az egyik 1-es kell legyen. **(2 pont)**
Így az $x_i = 1$ változóknak megfelelő A_i részhalmazokat kiválasztva a valóban fedést, optimális x_i megoldásból minimális költségű fedést kapunk. **(1 pont)**
b) A feladat eleve sztenderd alakú, a további optimalizálási ökölszabályok helyes alkalmazására egy-egy pont jár, összesen **(7 pont)**.
Lebontva:
A dualizálási ökölszabályok szerint a duális (DLP) feladat változói a primál (LP) feltételeinek (az együtthatómátrix sorainak) felelnek meg, így 5 duál változónk van, **(1 pont)**
pontosan azon duál változók nemnegatívak, ahol a megfelelő primál feltételben egyenlőtlenség van, **(1 pont)**
mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP célfüggvényében minimalizálunk, az optimalizálandó mennyiség pedig a duál változóknak a primál feltételek jobb oldalaival vett kombinációja, **(1 pont)**
a DLP lineáris feltételeinek jobb oldalai a primál célfüggvény együtthatói, és mivel a DLP is sztenderd alakú, $=$ és $\geq$ relációk szerepelhetnek, **(1 pont)**
mégpedig pontosan a nemnegatív primál változóknak megfelelő duális feltételeknél lesz egyenlőtlenség. **(1 pont)**
Felrajzolhatjuk a szamárvezetőt is (itt az együtthatómátrix helyes megállapítására jár a pont), **(1 pont)**
végül felírjuk a DLP-t egyenlőtleségekkel. **(1 pont)**
A kapott DLP a következő:

$$\max\{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\}$$
ha
$$\forall i \in \{1,\dots,5\}: y_i \geq 0$$
$$y_1+y_3 \leq 6$$
$$y_1+y_2+y_5 \leq 7$$
$$y_2+y_3+y_4 \leq 8$$
$$y_1+y_3+y_4+y_5 \leq 10$$

c) Nem. Könnyen látható, hogy az IP optimuma 15 (az A_2 és az A_3 halmazokat választva), **(1 pont)**
de (mivel az A_2, A_3 és A_4 halmazokban H minden eleme pontosan kétszer szerepel, így) az $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$ is megoldás, és a célfüggvény értéke erre 12,5, tehát az LP optimum kisebb, mint az IP optimum, **(1 pont)**
így a tanult tételek alapján a mátrix nem lehet TU (különben a két optimum egybeesne). **(1 pont)**

---

2. Legkevesebb hány élt kell behúzni az alábbi ábra bal oldalán látható gráfba úgy, hogy a kapott gráf kétszeresen összefüggő legyen? Mutassunk is példát megfelelő (és minimális számú) élek behúzására. **(12 pont)**



Megoldás: A tanult képlet alapján a keresett mennyiség $\max\left\{b(G)-1, \left\lfloor \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \right\rfloor\right\}$, ahol a $b(G)$ az egy csúcs törlése után kapott gráf összefüggőségi komponenseinek maximális száma, $m(G)$ a levélblokkok (egy darab elvágó csúcsot tartalmazó maxblokkok) száma, $m'(G)$ pedig az izolált blokkok (elvágó csúcsot nem tartalmazó maxblokkok) száma. **(3 pont)**
A jobb oldali komponens középső csúcsát törölve a kapott gráfnak 6 komponense lesz (bármely más csúcsot törölve legfeljebb 4), így $b(G) = 6$, tehát $b(G)-1 = 5$. **(3 pont)**
A levélblokkok, illetve az izolált blokkok száma $m(G) = 6$, $m'(G) = 1$ (a bal oldali komponens két K_3 blokkot tartalmaz, ezek levélblokkok, a középső komponens egy blokkból áll, ami izolált blokk, a jobb oldali pedig négy darab K_2 blokkból áll, mind levélblokk), így maximumban szereplő második tag $(6+2)/2 = 4$. **(2 pont)**
Ezek alapján 5 él behúzására van szükség, és ennyi elegendő is. **(1 pont)**
És valóban, öt élt be lehet úgy húzni, hogy a kapott gráf 2-összefüggő legyen. Jó példa esetén jár **(3 pont)**.

---

3. Tekintsük a fenti ábra jobb oldalán található gráfot. Van-e a csúcsainak olyan maxvissza sorrendje, melyben az utolsó csúcs x? **(10 pont)**

Megoldás: Ha volna ilyen sorrend, és abban az utolsó előtti csúcs v volna ($v \neq x$), akkor a tanult lemma alapján $\lambda(x,v) = d(x) = 3$ volna. **(4 pont)**
Azonban x bármely más csúcstól elvágható legföljebb 2 él elhagyásával: a tőle balra levő csúcsoktól egy darab (az x-ből balra induló) él elhagyásával is elvágható, a tőle jobbra levőktől pedig a két darab (az x-ből jobbra induló) él elhagyásával. **(4 pont)**
Emiatt $d(x,v) \leq 2$ bármely $v \in V(G)$-re, tehát x nem lehet utolsó semelyik maxvissza sorrendben. **(2 pont)**

---

4. A $J_1,\dots,J_{10}$ munkák megmunkálási ideje rendre $5,8,3,2,6,10,5,5,4,2$.
a) Ütemezzük a munkákat két (egyforma) gépre listás ütemezéssel LPT sorrendben. **(4 pont)**
b) Mennyi a kapott ütemezés átfutási ideje, illetve átlagos átfutási ideje? **(4 pont)**
c) Döntsük el, hogy a kapott átfutási idő, illetve átlagos átfutási idő optimális-e. (Ez két, külön kérdés, és mindkettőre meg is kell indokolni a választ.) **(4 pont)**

Megoldás: **a)** A munkákat időigényük szerint csökkenő sorrendben végezzük a két gépen, mindig az első szabad gépre ütemezve a soron következő munkát. **(2 pont)**
Az ütemezés eredménye (megmunkálási idők alapján, utána zárójelben az adott munka befejezési (átfutási) ideje):

M1:	10 (10)	5 (15)	5 (20)	3 (23)	2 (25)
M2:	8 (8)	6 (14)	5 (19)	4 (23)	2 (25)

(2 pont)

b) Az átfutási idő 25, mivel mindkét gép ekkor fejezi be a rá ütemezett munkákat. **(1 pont)**

Az átlagos átfutási idő az egyes munkák befejezési idejeinek összege elosztva a munkák számával, **(1 pont)**
azaz

$$\frac{(10+15+20+23+25)+(8+14+19+23+25)}{10}$$

(2 pont)

ami amúgy $182/10 = 18,2$. **(0 pont)**

c) Az átfutási idő optimális, hiszen a 10 munka összes megmunkálási ideje 50, tehát a hosszabb ideig dolgozó gép leállási ideje (azaz az átfutási idő) legalább 25. **(2 pont)**

Az átlagos átfutási idő nem optimális, például az első gépen az első két munkát (10 és 5 hosszúak) fölcserélve a kifejezésben szereplő számláló elején $10+15$ helyett $5+15$ fog állni, tehát az átlagos átfutási idő csökkenthető (jelentősebb mértékben is, például (gépenként) SPT sorrendet véve). **(2 pont)**