Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

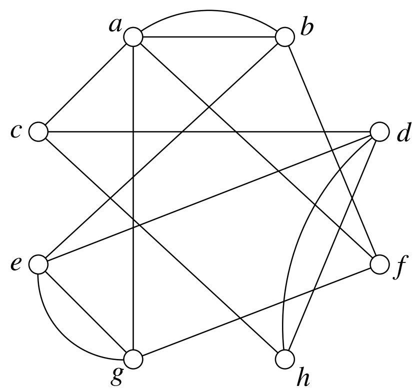
2. ZH (2024.05.09.)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. A $H = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ alaphalmazt szeretnénk minél olcsóbban lefedni. A fedéshez az alábbi részhalmazokat használhatjuk, minden részhalmaz után a költsége áll:
$\{a,b\}$, 5; $\{a,b,e,f,g\}$, 12; $\{a,b,f\}$, 7; $\{a,c,e\}$, 6; $\{b,c,d,e\}$, 9; $\{c,e,f,g\}$, 10.
a) Állapítsuk meg, hogy az órán tanult mohó algoritmus mely részhalmazokkal és milyen költséggel tudja lefedni a H halmazt. (Dokumentáljuk az algoritmus lépéseit is.) **(8 pont)**
b) Optimális-e a kapott megoldás? **(2 pont)**

---

2. a) Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcs közül is lehet választani, akkor mindig azt választjuk, amelyik betűrendbe sorolva a legelső közülük. **(9 pont)**
b) Van-e olyan maxvissza sorrendje a csúcsoknak, melyben a két utolsó csúcs c és e (valamilyen sorrendben)? **(5 pont)**



Nagyon figyeljünk oda a gráf átrajzolásának és az algoritmus lépéseinek pontos kivitelezésére, mert könnyű elrontani!

---

3. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (hasonló formában)! **(8 pont)**

$$
\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - 3x_2 + 2x_4 \leq 3\\
&x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -2\\
&-2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2\\
&x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = x_2 = -7/6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/3$ a primál feladat optimális megoldása, és az $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $y_3 = 3$ a duál feladat optimális megoldása. **(4 pont)**

---

4. Egy logisztikai raktárban egy automata targonca tölti meg az áruszállító teherautókat különféle méretű ládákkal, melyek egy polc két szintjén helyezkednek el. Ha a soron következő láda nem férne be a várakozó teherautók egyikébe sem, akkor a láda mozgatása előtt a targonca hív egy új járművet, majd annak megérkezése után folytatja a rakodást (így tesz például rögtön az elején, amikor még egy teherautó sincs ott). Minden teherautó kapacitása 100 egység. Az alsó polcon levő $a_1, \ldots, a_4$ ládák méretei 30, 60, 50, 40, míg a fölső polcon lévő $f_1, \ldots, f_4$ ládáké 40, 20, 20, 40 egység.
a) Hány teherautóra lesz szüksége a targoncának, ha az FFD algoritmus szerint pakolja a ládákat? **(6 pont)**

Előfordulhat, hogy az FFD algoritmus több láda közül is választhat. Ilyenkor a raktár rakodási protokollja szerint prioritást élveznek a fölső polcon levő ládák, illetve az azonos polcon levők közül a kisebb sorszámúak.
b) Az alsó polcon levő ládák átrakodási ideje 1 egység, a fölső polcon levőké 2 egység, új teherautó hívása esetén a várakozási idő 3 egység. Mennyi az előzőleg vizsgált, a raktári protokollnak megfelelő rakodás teljes átfutási ideje, illetve a ládák átpakolásának átlagos átfutási ideje? Lehet-e csökkenteni a teljes átfutási időt? **(8 pont)**