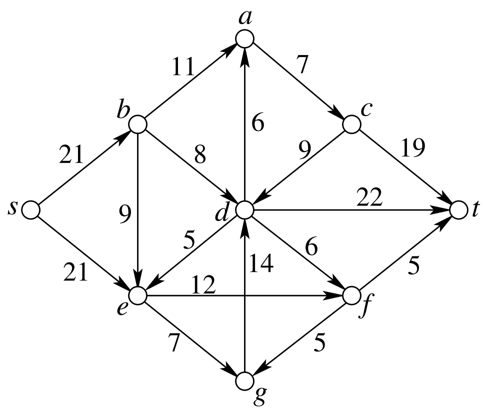
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. PZH javítókulcs (2024.04.24. 18-20, E1C)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Keressünk maximális st folyamot és minimális st vágást az ábrán látható hálózatban (és ne felejtsük el megindokolni, hogy az adott folyam / vágás miért maximális / minimális). **(11 pont)**



Megoldás: A hálózatban van 32 nagyságú folyam, például az $sbact$ út mentén 7-tel, az $sbdt$ út mentén 8-cal, az $seft$ út mentén 5-tel, az $segdt$ út mentén 7-tel, majd az $sefgdt$ út mentén 5-tel növelve a folyamot. **(5 pont)**
(Maximális folyam megtalálása (bármilyen módszerrel) **4 pont**ot ér, nagyságának megállapítása **1 pont**ot. Aki segédgráfot használ, az a folyam megtalálására járó 4 pontból legfeljebb **3 pont**ot kaphat a helyes lépések arányában akkor is, ha nem sikerült 32 nagyságú folyamot találnia. Aki ránézésre talál folyamot, de nem maximálisat, az legfeljebb **1 pont**ot kaphat az 5-ből.)
A hálózatban van 32 kapacitású vágás, például az $X = \{s,b,a,e,f\}$ (által indukált) vágás. **(3 pont)**
X kapacitása az X-ből kilépő élek kapacitásainak összege. Az X-ből kilépő élek halmaza $\{bd, ac, eg, fg, ft\}$, ez alapján X kapacitása $8+7+7+5+5 = 32$. **(2 pont)**
(Aki segédgráfból helyes ismeretek alapján próbál minimális vágás találni, de kivitelezési hiba miatt nem sikerül, az első 3-ból legföljebb **2 pont**ot kaphat, a vágás kapacitásának helyes kiszámítására megkaphatja a maradék **2 pont**ot. Ránézésre talált, de nem minimális vágás esetén csak a vágás kapacitásának ismeretére és kiszámítására járó **2 pont** ítélhető meg.)
Azt tanultuk, hogy bármely folyam nagysága legfeljebb akkora, mint bármely vágás kapacitása, tehát a 32 kapacitású vágásunk miatt a talált folyamunk valóban maximális, és a 32 nagyságú folyamunk miatt a talált vágásunk valóban minimális. **(1 pont)**
Kegészítés: aki ránézésre keres folyamot is, vágást is, de valamelyik nem optimális, és nem tudja befejezni a feladatot, az a 11-ből legfeljebb **4 pont**nyi részpontszámot kaphat.

---

2. A piréz A és a pritek B cégcsoport egyaránt négy-négy vállalattal rendelkezik ($A_1,\dots,A_4$ és $B_1,\dots,B_4$). A piréz-pritek kétoldalú támogatások minél sikeresebb kiaknázása érdekében minden A_iB_j vállalatpár beadna egy-egy pályázatot ($1 \le i,j \le 4$), melyekhez a szükséges együttes önerő mértékét a mellékelt táblázat tartalmazza (millió petákban értve). A pályázatok beadásának feltétele, hogy a két pályázó vállalat együttesen rendelkezzen a szükséges önerővel (ez pályázatonként külön-külön teljesítendő; azt nem vizsgálja senki, hogy ha egy vállalat esetleg több nyertes pályázatban is szerepelne, akkor az összeshez elő tudná-e teremteni a megfelelő önerőt a partnereivel). Emiatt a cégcsoportok vezetői az egyes vállalatok számára rendelkezésre bocsátandó pénzösszegek szétosztásáról tárgyalnak.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	4	2
A_2	3	7	4	7
A_3	8	4	5	7
A_4	6	5	1	3

a) Mennyi az a minimális összeg, melyet megfelelően szétosztva a nyolc vállalat között biztosítható, hogy minden pályázat benyújtható legyen? Modellezzük a feladatot alkalmas matematikai fogalmak használatával, majd válaszoljuk meg a kérdést (de ettől függetlenül is érdemes lehet az Egerváry-algorimtust lefuttatni a táblázaton). **(11 pont)**
b) Szét lehet osztani ezt az összeget úgy is, hogy az A cégcsoport vállalatai összesítve ugyanannyi pénzt kapjanak, mint

a B cégcsoport vállalatai? **(2 pont)**

Megoldás: **a)** Ha $c(x)$ jelöli az x vállalat számára rendelkezésre bocsátott pénzösszeget és $w(A_iB_j)$ az A_i és a B_j vállalatok közös pályázatához szükséges önerőt, akkor a feltétel az, hogy $c(A_i)+c(B_j) \geq w(A_iB_j)$ minden $1 \leq i,j \leq 4$ esetén, azaz a c függvény egy súlyozott lefogás legyen abban az élsúlyozott teljes páros gráfban, melynek csúcsosztályai $\{A_1,\dots,A_4\}$ és $\{B_1 \dots,B_4\}$, és a w függvény írja le az élsúlyokat. Tehát ebben a gráfban kell minimális összsúlyú súlyozott lefogást keresnünk. **(2 pont)**

Egerváry tétele szerint ez a mennyiség éppen a gráf egy maximális súlyú teljes párosításának összsúlyával egyenlő, tehát a magyar módszer kiválóan alkalmazható a kérdéses mennyiség megtalálására.

Kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximok, azaz $8,8,6,7$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. **(1 pont)**

Ha lehet, növeljük a párosítást javító úton (a fedetlen oszlopokból indulva alternáló utat keresünk valamely fedetlen sorba; ha találunk ilyet, annak mentén cseréljük a párosításban szereplő / nem szereplő éleket), **(2 pont)**

ha nem, csökkentjük a lefogás ősszsúlyát (a fedetlen oszlopokból javító úton elérhető oszlopok, ill. sorok súlyait csökkentve, ill. növelve). **(2 pont)**

Az algoritmus lépései alább láthatók, a helyes kivitelezésükért a számolásra összesen 2 pont jár. Ha nem található javító út, az alternáló úton elért oszlopokat és sorokat nyilak jelzik, a javító utat piros szín.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	4	2	0
A_2	3	**7**	4	**7**	0
A_3	**8**	4	**5**	**7**	0
A_4	6	5	1	3	0
	8	7	5	7	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	4	2	0
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	0
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	0
A_4	6	5	1	3	0
	8	7	5	7	

	↓	↓	↓	↓		
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	3	4	4	2	0	
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	0	←
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	0	←
A_4	6	5	1	3	0	
	8	7	5	7		

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	**4**	2	0
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	1
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	1
A_4	6	5	1	3	0
	7	6	4	6	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	$\boxed{4}$	2	0
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	1
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	1
A_4	6	5	1	3	0
	7	6	4	6	

	↓	↓		↓		
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	3	4	$\boxed{4}$	2	0	
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	1	←
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	1	←
A_4	6	5	1	3	0	
	7	6	4	6		

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	$\boxed{4}$	2	0
A_2	3	$\boxed{7}$	4	**7**	2
A_3	$\boxed{8}$	4	5	**7**	2
A_4	**6**	**5**	1	3	0
	6	5	4	5	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	$\boxed{4}$	2	0
A_2	3	**7**	4	$\boxed{7}$	2
A_3	$\boxed{8}$	4	**5**	**7**	2
A_4	6	$\boxed{5}$	1	3	0
	6	5	4	5	

(2 pont)

A kapott párosítás $(A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1, A_4B_2)$ összsúlya $8+5+4+7=24$, a kapott lefogás összsúlya $6+5+4+5+0+2+2+0=24$. A tanultak szerint bármely teljes párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint bármely súlyozott lefogás összsúlya, tehát a kapott teljes párosítás valóban maximális súlyú, a kapott lefogás minimális összsúlyú. (Érvelhetünk úgy is, hogy az órán tanultuk, hogy az Egerváry-algorimtus akkor áll meg, ha találtunk teljes párosítást pontos élekből, és ekkor a teljes párosítás max súlyú, az aktuális súlyozott lefogás pedig minimális.) **(2 pont)**

(Az algoritmus helyes futtatása tehát összesen **7 pont**ot ér; az első **5 pont** ebből akkor jár, ha a dolgozatból világosan kiderül, hogy a dolgozat írója az algoritmus lépéseit tudja és érti (akkor is megadható lehet, ha a lépések nincsenek szövegesen megfogalmazva, de a megtett lépések meggyőzően demonstrálják a szükséges ismeretek meglétét; ellenben az elmélet felidézése konkrét lépések megtétele nélkül nem ér pontot), a maradék **2 pont** a lépések helyes kivitelezésére adható (tehát pusztán számolási hibák miatt maximum kettő pont veszíthető). Az utolsó **2 pont** a konklúzió helyes levonására és indoklására jár. Bárhogyan máshogyan talált max súlyú teljes párosítás és minimális súlyú lefogás a helyes konklúzióval szintén **9 pont**ot érhet, de a teljes pontszámhoz precíz indoklás kell, amihez a szükséges fogalmak (pl. súlyozott lefogás) és tételek (Egerváry-tétel) ismerete világosan ki kell derüljön a dolgozatból.)

b) Igen, szét lehet osztani igazságosan, azaz $12+12$ felosztásban a pályázásokhoz szükséges induló 24 millió petákos tőkét: az előző részfeladatban talált minimális súlyozásban minden oszlop súlyát kettővel csökkentve, és minden sor súlyát kettővel növelve továbbra is súlyozott lefogást kapunk (hiszen bármely él két végpontjának súlyösszege változatlan), és így $\sum_{i=1}^{4} c(A_i) = 4+3+2+3 = 12 = \sum_{i=1}^{4} c(B_i) = 2+4+4+2$. **(2 pont)**

---

3. Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert.

a) Döntsük el az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk is egy megoldást. **(12 pont)**

b) Van-e olyan megoldása a rendszernek, melyben $x_2 = -2$? **(2 pont)**

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\le 2 \\ -2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &\ge 10 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &\le 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 &\ge -3 \end{aligned}$$

Megoldás: **a)** Először is hozzuk sztenderd alakra (minden $\ge$ egyenlőtlenséget $\le$ alakúra írunk át negatív szorzó segítségével): **(1 pont)**

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\le 2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 &\le -10 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &\le 7 \\ -3x_1 + 6x_2 - 12x_3 &\le 3 \end{aligned}$$

A következőekben a kibővített együtthatómátrixszal dolgozunk úgy, ahogy az órán tanultuk: sorra elimináljuk a változókat úgy, hogy az adott változót nemnulla együtthatóval tartlamazó sorokat alkalmas nemnegatív számmal szorozva elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója ± 1 legyen, majd az összes, az adott változót $+1$ együtthatóval tartalmazó sort összeadjuk az összes, az adott változót -1 együtthatóval tartalmazó sorral, és az eredményül kapott sorokat, valamint az adott változót 0 együtthatóval tartalmazó sorokat írjuk az új mátrixba. Ezt az eljárást folytatjuk, míg az összes változót elimináltuk, vagy tilos sort kapunk (minden együttható 0, de a jobboldal negatív). A mintamegoldásban az x_1, x_2, x_3 sorrendben elimináljuk a változókat. **(3 pont)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & 2 \\ 2 & -8 & 4 & -10 \\ -1 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & 6 & -12 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ **(2 pont)**

(Az utolsó előtti állapotban az x_3 együtthatója sohasem volt -1, így nem lehetett (és nem is kellett) sorösszegeket képezni, csak a nulla együtthatós sorok másolásával kaptuk az utolsó mátrixot.)

Mivel nem kaptunk tilos sort, a tanultak szerint az egyenlőtlenségrendszer megoldható. **(1 pont)**

(Az első **3 pont** arra jár, ha valaki az eljárás lépéseit ismeri és alkalmazni is tudja. Az előbbi kiderülhet szövegszerű megfogalmazásból, de annak híján az elvégzett lépésekből is; utóbbi a lépések kivitelezéséből látható. Aki felidézi ugyan a vonatkozó elméletet, de egyáltalán nem demonstrálja, hogy alkalmazni is képes azt a feladatra, az **0 pont**ot kap. A második **3 pont** a lépések helyes kivitelezésére és a megoldás létezésének megállapítására adható meg.)

A tanultak alapján úgy kaphatunk egy megoldást, ha a változól eliminálási sorrendjét megfordítva az adott változónak az eliminálását megelőző utolsó állapotnak megfelelően választunk megengedett értéket, majd ezt rögzítve haladunk tovább a következő változóra. **(2 pont)**

Az ötödik mátrix alapján az egyetlen feltételünk $x_3 \le 3$, válasszuk mondjuk az $x_3 = 0$ értéket. A negyedik mátrix alapján az x_2-t tartalmazó sorok $-x_2 \le 1$, $x_2 + x_3 = x_2 \le 2$, $-x_2 - x_3 = -x_2 \le -2$, ezeket összevetve $2 \le x_2 \le 2$, válasszuk tehát az $x_2 = 2$ értéket. Az x_1-re a második mátrixból kapott feltételek: $x_1 - 5_x 2 + 4x_3 = x_1 - 10 \le 2$, azaz $x_1 \le 12$; $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = x_1 - 8 \le -5$, azaz $x_1 \le 3$; $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -x_1 + 4 \le 1$, azaz $x_1 \ge 3$; végül $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -x_1 + 4 \le 1$, azaz $x_1 \ge 3$, ebből $x_1 = 3$ adódik. **(2 pont)**

(Az első **2 pont** annak jár, aki tudja és érti, hogy mit és hogyan kell számolni; a második **2 pont** a számolások maradéktalanul helyes kivitelezésére adható meg.)

b) Behelyettesítve $x_2 = -2$-t, az első és az ötödik egyenlőtlenségből (egyszerűsítve) $x_1 + 10 + 4x_3 \le 2$, azaz $x_1 + 4x_3 \le -8$, valamint $x_1 + 4 + 4x_3 \ge -1$, azaz $x_1 + 4x_3 \ge -5$ adódik, ami ellentmondás, tehát nincs olyan megoldás, ahol $x_2 = -2$. **(2 pont)**

(Természetesen a FM-elimináció során az x_2 változót utolsóként eliminálva is megkaphatjuk ugyanezt az eredményt, hiszen abból $x_2 \geq -1$ adódik.)

---

4. Tekintsük az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$x, y \geq 0$$
$$2x + 5y \leq 125$$
$$3x + y \leq 51$$

a) Határozzuk meg a feltételeknek eleget tevő síkbeli (x, y) pontok által alkotott P sokszögtartomány csúcsait. **(6 pont)**
b) A P minden csúcsához adjunk olyan célfüggvényt a fenti feltételek mellé, melyre az adott csúcs az egyetlen optimális megoldás. Ha ez valamely csúcsra nem lehetséges, indokoljuk meg, miért ez a helyzet. **(6 pont)**

Megoldás: **a)** A nemnegativitási feltételek utáni két feltételre $F1$, $F2$-ként hivatkozunk; egyúttal ezek fogják jelölni a feltételekből adódó félsíkok határoló egyeneseit (a feltételt egyenlőséggel teljesítő pontok halmazát) is.
Meghatározzuk a poliédert (a feltételeket kielégítő (x, y) pontok halmazát a síkon), a csúcsok a feltételek határegyeneseinek metszéspontjaiból kerülnek ki. Az $x = 0$ tengellyel a metszéspontok: $F1 : (0, 25)$, $F2 : (0, 51)$ ezek közül az első van a poliéderben (a második nem teljesíti $F1$-et: behelyettesítve $F1$-be $2 \cdot 0 + 5 \cdot 51 > 125$). **(2 pont)**
Az $y = 0$ tengellyel a metszéspontok: $F1 : (62.5, 0)$, $F2 : (17, 0)$. Ezek közül az utolsó van a poliéderben (az első nem teljesíti $F2$-t, mert abba behelyettesítve $3 \cdot 62.5 + 0 > 51$ nyilvánvaló). **(2 pont)**
A két lineáris feltétel metszéspontja: $F1 \cap F2 = (10, 21)$, ez nyilván teljesít minden feltételt, tehát csúcs lesz. **(1 pont)**
Ne feledkezzünk meg a $(0, 0)$ csúcsról sem, mely a két nemnegativitási feltétel metszete (és persze teljesíti $F1$-et és $F2$-t). **(1 pont)**
Összefoglalva a poliéderünk csúcsai $(0, 0)$, $(0, 25)$, $(10, 21)$ és $(17, 0)$. **(0 pont)**
b) A tanultak szerint bármely célfüggvény fölveszi a maximumát a poliéder valamely csúcsában (és esetleg egy oldalél belső pontjaiban is), **(1 pont)**
tehát elég a jelöltjeinkre egy-egy alkalmas célfüggvényt találni, és annak értékét kiszámolni a csúcsokban; ha a kiszemelt csúcs az egyedüli optimum, akkor van sikeresen találtunk megfelelő célfüggvényt. Segít, ha a geometriai interpretációból merítünk ihletet: olyan támaszegyeneseket kell keresni, ami a poliédert a kiszemelt csúcsban érinti. Akárhogy is, könnyen találunk minden csúcshoz megfelelő célfüggvényt, ezek lehetnek például:
a $(0, 0)$ csúcsra a $\min(x + y)$ (avagy $\max(-x - y)$, de szabad minimalizálni is) **(2 pont)**
a $(0, 25)$ csúcsra a $\max y$ **(1 pont)**
a $(10, 21)$ csúcsra a $\max x + y$ **(1 pont)**
a $(17, 0)$ csúcsra a $\max x$ **(1 pont)**