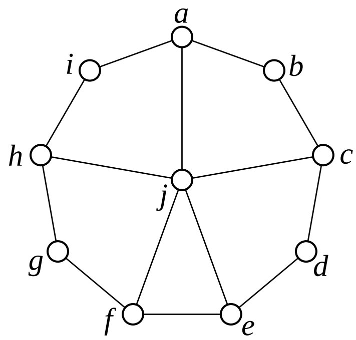
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH javítókulcs (2024.04.08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Egy tíz fős cég munkatársai csapatépítés céljából szabadulószobázni mennek. Az ismeretségek elmélyítése érdekében azok a munkatárak, akiknek már volt közös projektjük, nem mehetnek ugyanabba a szobába. A jobbra látható gráf csúcsai reprezentálják a cég dolgozóit, és két csúcs közt akkor van él, ha a megfelelő személyeknek már volt közös projektje. A négy szabadulószobát üzemeltető vállalkozó valamilyen sorrendben haladva, egymás után osztja be a résztvevőket: az éppen aktuális delikvenst beküldi az első olyan szobába, ahol még nincs olyan kolléga, akivel volt közös projektje. Előfordulhat-e az, hogy a vállalkozó…



a) …csak az első három szobába küldi a tíz résztvevőt? **(3 pont)**
b) …mind a négy szobába küld valakit? **(3 pont)**
c) …bajba kerül, mert szüksége volna egy ötödik szobára a beosztáshoz? **(6 pont)**
(Javaslat: fogalmazzunk meg egy matematikai modellt, és abban válaszoljuk meg a három kérdést.)

Megoldás: A feladat valójában azt kérdezi, hogy a kapott gráf csúcsait valamilyen sorrendben mohón színezve (a tanult eljárás szerint) hány színt fogunk használni, ahol a szobák a színeknek felelnek meg.

a)
Igen. A csúcsokat ABC-sorrendben színezve három színt fogunk használni, ahogy az alábbi táblázat is mutatja:

csúcs	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
szín	1	2	1	2	1	2	1	2	3	3

(3 pont)

b) Igen, például az alábbi táblázatban látott sorrend szerint haladva 4 színt fogunk használni:

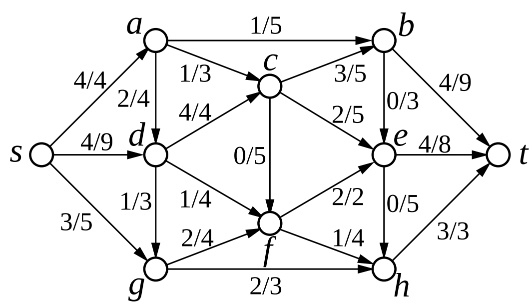
csúcs	b	c	d	e	f	g	h	i	a	j
szín	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4

(3 pont)

c) Nem. A gráfban az $a, b, \dots, i$ csúcsok egy kört alkotnak. A csúcsok tetszőleges sorrendje esetén van néhány (esetleg egy sem) csúcs a körről, aztán j, aztán a maradék csúcsok a körről (esetleg egy sem). **(0 pont)**
Ha a v csúcsot a j előtt színezzük ki, akkor a v színezésekor v-nek legfeljebb két színes szomszédja lehet, tehát az $1,2,3$ színek valamelyikét biztosan megkaphatja. **(2 pont)**
Emiatt a j-nek a már megszínezett szomszédai összesen csak háromféle színt használhatnak, így j-nek biztosan választhatunk színt az $1,2,3,4$ színek közül. **(2 pont)**
A hátralevő csúcsoknak pedig a fokszáma legfeljebb három, tehát legfeljebb három szín lehet tiltva náluk a színezésükkor, így szintén biztosan színezhetők az $1,2,3,4$ színekből. **(2 pont)**
Öt színre tehát sosem lesz szükség. **(0 pont)**
Megjegyzés: a kérdések a mohó színezésre való átfogalmazás nélkül is megoldhatók, helyes válasz és indoklás esetén természetesen ekkor is jár a megfelelő pontszám. Aki helyesen átfogalmazza a feladatot mohó színezésre, az erre **2 pont**ot kaphat a részfeladatok megoldása nélkül is (de természetesen összesen maximum 12 pontot).

---

2. Az ábrán egy hálózat látható; az élekre írt a/b alakú kifejezésben az első szám (a) egy st-folyam értéke az adott élen, a második szám (b) pedig az él kapacitása.

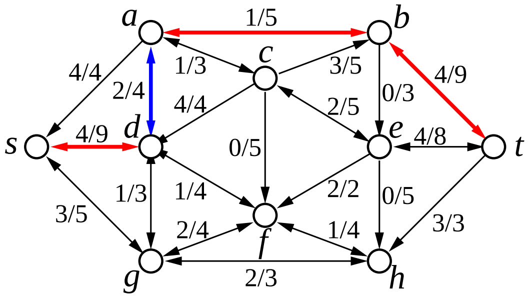


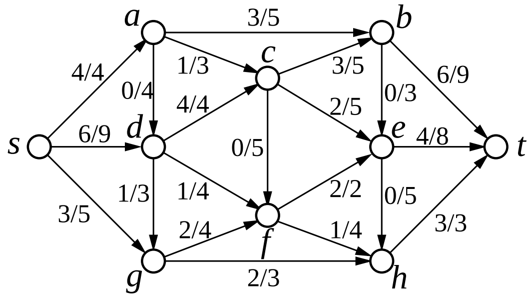
a) Döntsük el, hogy a megadott folyam maximális st-folyam-e. Ha igen, mutassunk erre bizonyítékot; ha nem, akkor módosítsuk a folyamot úgy, hogy maximális st-folyamot kapjunk (és persze a módosított folyam maximalitását se feledjük el igazolni). **(7 pont)**
b) Egyetlen él irányításának megfordítására van lehetőségünk. Úgy szeretnénk ezt megtenni, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen. Mennyivel lehetséges ilymódon megnövelni a maximális folyamnagyságot? (Ha azt állítjuk, hogy a válasz p, ak-

kor mutassunk élt, melynek megfordításával valóban p-vel nő a maximális folyamnagyság, és indokoljuk meg, hogy semelyik él megfordításával sem nő p-nél többel.) **(7 pont)**

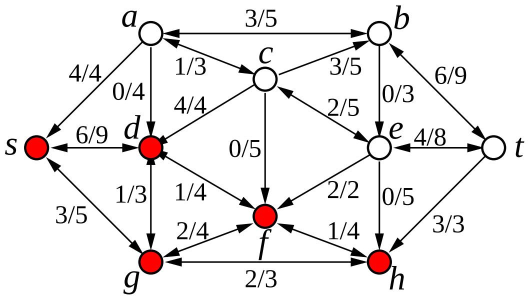
Megoldás: **a)** Az órán tanult módszert követve elkészítjük a folyamhoz tartozó segédgráfot: ha egy élen lehet növelni a folyamot, akkor bevesszük az eredeti irányítással, ha csökkenteni lehet, akkor a fordítottal (esetleg mindkettővel), lásd bal oldali ábrán. **(2 pont)**

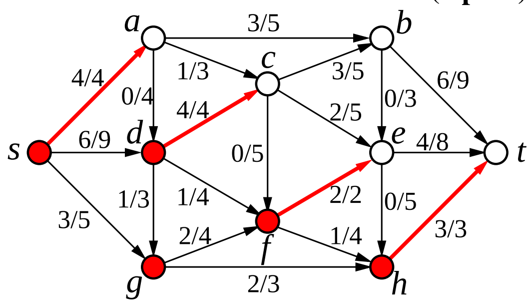
A segédgráfban s,d,a,b,t irányított út s-ből t-be, tehát az eredeti gráfban a folyam e mentén a javító út mentén $\varepsilon = 2$-vel javítható (előreélen (piros) növelünk, visszaélen (kék) csökkentünk), tehát kapunk egy 13 nagyságú st-folyamot (ld. jobbra). Ez igazolja, hogy az eredeti nem volt maximális. **(2 pont)**





A kapott folyam maximális lesz: a hozzá tartozó (módosított) segédgráfban (ld. balra) nincs irányított st-út. Az s csúcsból a segédgráfban elérhető csúcsok halmaza $X = \{s,d,g,f,h\}$ (pirosak), az X halmazból az eredeti gráfban kilépő élek (pirosak, ld. jobbra): sa, dc, fe, ht, az indukált vágás kapacitása tehát ezen élek kapacitásainak összege, $4+4+2+3 = 13$. **(2 pont)**





Mivel minden st-folyam nagysága legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges st-vágás kapacitása, a talált folyamunk valóban maximális. **(1 pont)**

Természetesen ha valaki a segédgráf nélkül találja meg a megfelelő folyamot és vágást, az is maximális pontszámot érhet.

b) A tanult tétel alapján egy maximális st-folyam nagysága és egy minimáis st-vágás kapacitása megegyezik. Emiatt elég azt vizsgálni, hogy egy él megfordításának hatására hogyan változik egy-egy st-vágás kapacitása. **(1 pont)**

Legyen $s \in X$, $t \notin X$. Ha az $e = uv$ él mindkét végpontja X-ben van, vagy mindkét végpontja X-en kívül van, akkor az e megfordítása nem változtatja meg az X által indukált vágás kapacitását. **(1 pont)**

Ha e kilép X-ből, akkor e megfordításával X kapacitása $c(e)$-vel csökken, hiszen e már nem fog kilépni X-ből. Ha e belép X-be, megfordításával X-ből kilépő él lesz belőle, tehát $c(e)$-vel fog nőni X kapacitása. **(1 pont)**

Tetszőleges X vágásra egyetlen sv vagy vt él sem léphet X-be, megfordításuk tehát nem növelheti X kapacitását. Az összes többi él kapacitása legfeljebb 5, így megfordításukkal legföljebb 5-tel nőhet az X kapacitása. Emiatt az új hálózatban legfeljebb 5-tel lehet nagyobb egy st-folyam, mint az eredetiben. **(2 pont)**

A cf él megfordítása után pedig valóban lehet növelni 5-tel az előző folyamunkat: az s,d,f,c,e,t út mentén hárommal, az s,g,f,c,b,t út mentén kettővel. Így a legnagyobb elérhető növekedés valóban 5. **(2 pont)**

---

3. Az oldalt látható mátrix az $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ és $\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az A_iB_j él súlya az A_i indexű sor és a B_j indexű oszlop metszetében álló szám.

a) Van-e olyan maximális súlyú párosítás a gráfban, melyben az A_1B_2 és az A_4B_1 él is szerepel? **(3 pont)**

b) Adjuk meg a gráf egy maximális súlyú párosítását és egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. **(9 pont)**

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	8	5	6
A_2	4	7	3	4
A_3	5	6	3	5
A_4	7	8	6	7

Megoldás: **a)** Nem: ha egy párosításban szerepelnek az A_1B_2 és az A_4B_1 élek, azok összsúlya 15, viszont a párosításban lecserélve őket a 16 összsúlyú A_1B_1 és az A_4B_2 élekre (a párosítás többi élét változatlanul hagyva), a párosítás összúlya eggyel nő, tehát nem volt maximális. **(3 pont)**

b) Alkalmazzuk az órán tanult magyar módszert. Kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximok, azaz $8,8,6,7$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. Ha lehet, növeljük a párosítást javító úton (a fedetlen oszlopokból indulva alternáló utakat keresünk), ha nem, csökkentjük a lefogás összsúlyát a tanult módon. Az algoritmus helyes futtatása 7 pontot ér. Bárhogyan máshogyan talált max súlyú teljes párosítás és minimális súlyú lefogás szintén 7 pont, de ha csak az egyik jó, akkor 3 pont. Az algoritmus lépései alább láthatók. Ha nem található javító út, az alternáló úton elért oszlopokat és sorokat nyilak jelzik; az előbbieken csökkentjük, utóbbiakon növeljük a lefogás súlyait. **(7 pont)**

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**8**	**8**	5	6	0
A_2	4	7	3	4	0
A_3	5	6	3	5	0
A_4	7	**8**	**6**	**7**	0
	8	8	6	7	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{8}$	**8**	5	6	0
A_2	4	7	3	4	0
A_3	5	6	3	5	0
A_4	7	$\boxed{8}$	**6**	**7**	0
	8	8	6	7	

	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$\boxed{8}$	**8**	5	6	0	$\leftarrow$
A_2	4	7	3	4	0	
A_3	5	6	3	5	0	
A_4	7	$\boxed{8}$	**6**	**7**	0	$\leftarrow$
	8	8	6	7		

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{8}$	**8**	5	6	1
A_2	4	**7**	3	4	0
A_3	5	6	3	5	0
A_4	7	$\boxed{8}$	**6**	**7**	1
	7	7	5	6	

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{8}$	**8**	5	6	1
A_2	4	$\boxed{7}$	3	4	0
A_3	5	6	3	5	0
A_4	7	**8**	$\boxed{6}$	**7**	1
	7	7	5	6	

			$\downarrow$	$\downarrow$		
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	$\boxed{8}$	**8**	5	6	1	
A_2	4	$\boxed{7}$	3	4	0	
A_3	5	6	3	5	0	
A_4	7	**8**	$\boxed{6}$	**7**	1	$\leftarrow$
	7	7	5	6		

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{8}$	**8**	**5**	**6**	1
A_2	4	$\boxed{7}$	3	4	0
A_3	5	6	3	$\boxed{5}$	0
A_4	7	8	$\boxed{6}$	**7**	2
	7	7	4	5	

A kapott párosítás $(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_4, A_4B_3)$ összsúlya $8+7+6+5=26$, a kapott lefogás összsúlya $7+7+4+5+1+0+0+2=26$. A tanultak szerint bármely teljes párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint bármely súlyozott lefogás összsúlya, tehát a kapott teljes párosítás valóban maximális súlyú, a kapott lefogás minimális összsúlyú. **(2 pont)**

---

4. Oldjuk meg az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max 5x+6y,\ &\text{ha} \\ x,y &\geq 0 \\ x+4y &\leq 50 \\ 4x+5y &\leq 90 \\ 3x+2y &\leq 57 \end{aligned}$$

(12 pont)

Megoldás: A nemnegativitási feltételek utáni három feltételre $F1$, $F2$, $F3$-ként hivatkozunk; egyúttal ezek fogják jelölni a feltételekből adódó félsíkok határoló egyeneseit (a feltételt egyenlőséggel teljesítő pontok halmazát) is.
Meghatározzuk a poliédert (a feltételeket kielégítő (x,y) pontok halmazát a síkon), a csúcsok a feltételek határegyeneseinek metszéspontjaiból kerülnek ki. Az $x=0$ tengellyel a metszéspontok: $F1:(0,12.5)$, $F2:(0,18)$, $F3:(0,28.5)$, ezek közül csak az első van a poliéderben (a többi nyilván nem teljesíti $F1$-et). **(1 pont)**
Az $y=0$ tengellyel a metszéspontok: $F1:(50,0)$, $F2:(22.5,0)$, $F3:(19,0)$, ezek közül csak az utolsó van a poliéderben (a többi nyilván nem teljesíti $F3$-at). **(1 pont)**
A három lineáris feltétel metszéspontjai: $F1\cap F2=(10,10)$, ez teljesíti $F3$-at $(50\leq 57)$, tehát a poiéder pontja, így csúcs lesz; $F2\cap F3=(15,6)$, ez teljesíti $F1$-et is $(39\leq 50)$, tehát a poliéder pontja, így csúcs lesz; $F1\cap F3=(12.8,9.3)$, de ez nem teljesíti $F2$-t $(4\cdot 12.8+5\cdot 9.3=97.7>90$, így nincs a poliéderben. **(3 pont)**
Tehát a poliéderünk csúcsai $(0,0)$, $(0,12.5)$, $(10,10)$, $(15,6)$, $(19,0)$. **(1 pont)**
A tanultak szerint a célfüggvény a maximumát a poliéder valamely csúcsában veszi föl, **(3 pont)**
ezek az értékek rendre 0, 75, 110, 111, 95, tehát a maximum $x=15$, $y=6$ esetén realizálódik, **(2 pont)**
értéke 111. **(1 pont)**