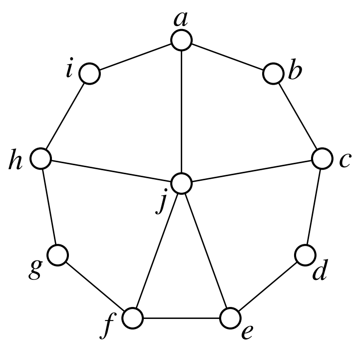
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH (2024.04.08.)

A rendelkezéser álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét** és a **Neptun kódját** a dolgozat minden lapjának jobb fölső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Íróeszeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. Egy tíz fős cég munkatársai csapatépítés céljából szabadulószobázni mennek. Az ismeretségek elmélyítése érdekében azok a munkatárak, akiknek már volt közös projektjük, nem mehetnek ugyanabba a szobába. A jobbra látható gráf csúcsai reprezentálják a cég dolgozóit, és két csúcs közt akkor van él, ha a megfelelő személyeknek már volt közös projektje. A négy szabadulószobát üzemeltető vállalkozó valamilyen sorrendben haladva, egymás után osztja be a résztvevőket: az éppen aktuális delikvenst beküldi az első olyan szobába, ahol még nincs olyan kolléga, akivel volt közös projektje. Előfordulhat-e az, hogy a vállalkozó...



a) ... csak az első három szobába küldi a tíz résztvevőt? **(3 pont)**

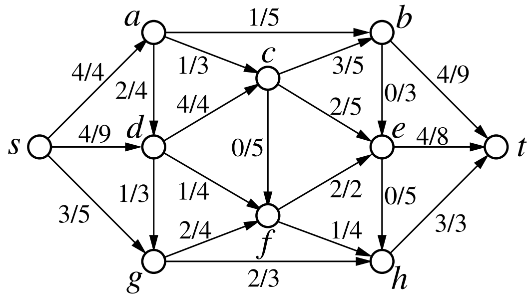
b) ... mind a négy szobába küld valakit? **(3 pont)**

c) ... bajba kerül, mert szüksége volna egy ötödik szobára a beosztáshoz? **(6 pont)**

(Javaslat: fogalmazzunk meg egy matematikai modellt, és abban válaszoljuk meg a három kérdést.)

---

2. Az ábrán egy hálózat látható; az élekre írt a/b alakú kifejezésben az első szám (a) egy st-folyam értéke az adott élen, a második szám (b) pedig az él kapacitása.



a) Döntsük el, hogy a megadott folyam maximális st-folyam-e. Ha igen, mutassunk erre bizonyítékot; ha nem, akkor módosítsuk a folyamot úgy, hogy maximális st-folyamot kapjunk (és persze a módosított folyam maximalitását se feledjük el igazolni). **(7 pont)**

b) Egyetlen él irányításának megfordítására van lehetőségünk. Úgy szeretnénk ezt megtenni, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen. Mennyivel lehetséges ilymódon megnövelni a maximális folyamnagyságot? (Ha azt állítjuk, hogy a válasz p, akkor mutassunk élt, melynek megfordításával valóban p-vel nő a maximális folyamnagyság, és indokoljuk meg, hogy semelyik él megfordításával sem nő p-nél többel.) **(7 pont)**

---

3. Az oldalt látható mátrix az $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az A_iB_j él súlya az A_i indexű sor és a B_j indexű oszlop metszetében álló szám.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	8	5	6
A_2	4	7	3	4
A_3	5	6	3	5
A_4	7	8	6	7

a) Van-e olyan maximális súlyú párosítás a gráfban, melyben az A_1B_2 és az A_4B_1 él is szerepel? **(3 pont)**

b) Adjuk meg a gráf egy maximális súlyú párosítását és egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. **(9 pont)**

---

4. Oldjuk meg az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max 5x + 6y,\ \text{ha} & \\ x, y &\geq 0 \\ x + 4y &\leq 50 \\ 4x + 5y &\leq 90 \\ 3x + 2y &\leq 57 \end{aligned}$$

(12 pont)