Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

10. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók.

Gráfélek leemelése

Definíció. Legyenek $e = uz$, $f = vz$ a G gráf két éle. Az e, f *leemelésével* keletkezik a $G^{ef} = G - e - f + uv$ gráf.
Definíció. $X \subseteq V$ esetén $d(X) := |E(X)|$ az X és $V \setminus X$ között futó élek száma, X, $Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X,Y) := |E(X,Y)|$ az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek száma.
Állítás. Tetszõleges irányítatlan $G = (V,E)$ gráf és $X, Y \subseteq V$ esetén
(1) $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y, Y \setminus X)$ ill.
(2) $d(X) + d(Y) = d(X \setminus Y) + d(X \setminus Y) + 2d(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$ teljesül.
Tétel. (Lovász) Tfh $d(z)$ páros és $\lambda_G(x,y) \geq k \geq 2$ teljesül minden $x, y \in V$ csúcsra a $G = (V + z, E)$ gráfban. Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = vz$ él, melyre $\lambda_{G^{ef}}(x.y) \geq k$ minden x, $y \in V$ csúcsra.
Lemma. Ha a G gráf k-élösszefüggõ, ám $G - e$ már nem k-élösszefüggõ a G tetszõleges e élére, akkor G-nek van k-adfokú csúcsa.
Tétel. A $G = (V,E)$ gráf pontosan akkor $2k$-élösszefüggõ, ha elõállítható egy pontból kiindulva az alábbi lépések tetszõleges sorozatával. (1) Az eddig elkészített gráfhoz élt adunk hozzá. (2) Az eddig elkészített gráf k élét összecsípjük, azaz a k él mindegyikét felosztjuk egy-egy új csúccsak és ezeket az osztópontokat egybeolvasztjuk.
Tétel. (Nash-Williams) A G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van k-élösszefüggõ irányítása, ha G (irányítatlan értelemben) $2k$-élösszefüggõ.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel hogy a G gráfnak legalább 2 csúcsa van, k-élösszefüggő, de bármely élét elhagyva már nem k-élösszefüggő. Bizonyítsuk be hogy G-nek van k fokú csúcsa.

2. Azt mondjuk, hogy az $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$ halmaz a G gráf egy minimális vágását határozza meg, ha az X-bõl kilépõ élek száma a minimális a $V(G)$ valódi részhalmazai körében, azaz bármely $\emptyset \neq Y \subsetneq V(G)$ esetén Y és $V(G) \setminus Y$ között legalább annyi él fut, mint X és $V(G) \setminus X$ között. Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y a $V(G)$ keresztezõ részhalmazai (azaz $X \cap Y, X \setminus Y, Y \setminus X$ és $V(G) \setminus (X \cup Y)$ egyike sem üreshalmaz), akkor $X \cap Y, X \cup Y$ és $X \setminus Y$ is a G gráf egy minimális vágását határozza meg.

3. Tegyük fel, hogy G olyan 4-élösszefüggõ gráf, aminek v egy 8-fokú csúcsa. Igazoljuk, hogy a $G - v$ gráfhoz hozzáadható egy-egy negyedfokú v_1 és egy v_2 csúcs úgy, hogy a kapott gráf 4-élösszefüggõ legyen, és a G gráf v-tõl különbözõ csúcsainak fokszáma ne változzon. (Tkp a v csúcsot kell szétszedni két negyedfokú csúcsra a 4-szeres élösszefüggõség megõrzésével.)

4. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggõ G gráfnak u és v szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan ux és vy éle, amelyre az említett élek és uv törlésével, valamint egy xy él behúzásával létrejövõ $G - uv - ux - vy + xy$ gráf szintén 4-szeresen élösszefüggõ.

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggõ G gráfnak u és v nem szomszédos, negyedfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u-nak vannak olyan a és b szomszédai, valamint v-nek olyan c és d szomszédai, hogy a $G' = G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vb$ gráf 4-szeresen összefüggõ. (4 élt törlünk és 4 élt hozzáveszünk G-hez.)

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszõleges $k \geq 1$ egész szám esetén minden $2k$-reguláris és $2k$-szorosan élösszefüggõ gráf megkapható egy k hurokélt tartalmazó egycsúcsú gráfból él-k-asok egymás utáni összecsípésével.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a 100-csúcsú G gráf minden egyes élét úgy lehet a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére kiszínezni, hogy a piros élek egy 100-csúcsú kört, a fehér élek egy 100-csúcsú fát a zöld élek pedig egy 100-csúcsú összefüggõ gráfot alkotnak, akkor G megkapható egy csúcsból kiindulva élhozzáadások és élpárösszecsípések alkalmas egymásutánjával.