Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

9. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

<u>**Tudnivalók.**</u> **Definíció.** A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G-e)$-nek ($(G-v)$-nek) több komponense van, mint G-nek. A G gráf 2-*élösszefüggő*, ha G összefüggő és G-nek nincs elvágó éle. A G gráf 2-*összefüggő*, ha G összefüggő, legalább 3 csúcsa van és G-nek nincs elvágó pontja. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja (azaz vagy K_1, vagy K_2, vagy egy 2-összefüggő gráf.) A G *maxblokkja* a G egy tartalmazásra nézve maximális blokk részgráfja (azaz olyan részgráf, ami blokk, de nincs benne másik blokk részgráfban), a G 2-*komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés. Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén

(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.

(2) A 2-komponensek faszerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G-ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)

(3) A G maximális blokkjai faszerűen csatlakoznak egymáshoz. (Azaz a $T_2(G)$ gráf erdő, ahol $T_2(G)$ csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig az illeszkedő blokk-elvágó pont párok.)

Definíció. A G gráf K 2-komponense *levél*, ha K a G-nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komponens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, azaz ha K a G egy olyan kompnense, ami 2-élösszefüggő.

Definíció. A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G-nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy komponense.

Tétel. A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\cdot\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel. A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G)-1, \left\lceil \frac{m(G)+2\cdot m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G-ből egy csúcs elhagyásával keletkező gráf komponenseinek maximális száma.

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u, v)$ jelöli az u-ból v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak max számát. Menger tétele miatt ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló élhalmazok minimális méretével, azaz a legkisebb olyan X élhalmaz mérete, melyre u és v a $G-X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van. Hasonlóan, $\kappa(u, v)$ pedig az u-ból v-be vezető páronként belsőleg pontdiszjunkt utak maximális számát jelöli. Ha u és v nem szomszédosak, Menger tétele szerint ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló csúcshalmazok minimális méretével, azaz legkisebb olyan X csúcshalmaz mérete, melyre u és v a $G-X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van (ilyenkor $u, v \notin X$ szükségszerű).

Definíció. A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$. Ez megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Definíció. A G *(pont)összefüggőségi száma* $\kappa(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$. Ha G-ben vannak nem szomszédos csúcsok, akkor ez megegyezik azon csúcsok minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Definíció. A G *vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek $E(X)$ halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés. Adott u, v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u, v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. (Sőt: $n-1$ is elég, hiszen u rögzíthető.)

Megfigyelés. Legyen u és v a G multigráf két különböző csúcsa. Ha G-nek van az u-t és v-t szeparáló minimális vágása, akkor $\lambda(G) = \lambda(u, v)$. Ha nincs ilyen minimális vágása G-nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek az u és v csúcsok összeragasztásával (összehúzásával) képzett G/uv gráf minimális vágásaival, azaz $\lambda(G) = \lambda(G/uv)$.

Definíció. A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazba a v_i csúcsból legalább annyi él megy, mint bármely v_j-ből, ha $j > i$. Azaz a soron következő v_i csúcs mindig a korábbi csúcsok halmazához legtöbb éllel kapcsolódó csúcsok egyike.

Lemma. Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a $\{v_n\}$ minimális élszámú olyan vágást határoz meg, ami v_n-et és v_{n-1}-et szeparálja.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus

<u>Input:</u> $G = (V, E)$ multigráf, <u>Output:</u> G egy X minimális vágása.

I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.

II. Felírjuk a v_n-ből kiinduló élek halmazát (minvágásjelölt).

III. Ha több mint két csúcs van, összeragasztjuk a v_n és v_{n-1} csúcsokat. GoTo I.

IV. Ha már csak két csúcs van, akkor az $n-1$ feljegyzett minvágásjelöltből kiválasztjuk az egyik legkisebbet. Ez egy minvágás lesz G-ben, mérete G élösszefüggőségi száma. (Vegyük észre: az összeragasztások miatt a minvágásjelöltek az eredeti G-ben nem feltétlenül egy csúcsból, hanem egy csúcshalmazból kilépő élek halmazai.)

Tétel. Ha G 2-élösszefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy *csúcsból* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. *A fül két végpontja lehet azonos.* Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-élösszefüggő.

Tétel. Ha G 2-összefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy *körből* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. *A fül két végpontja nem lehet azonos.* Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-összefüggő.

Gyakorlatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai a 42-nél kisebb (pozitív) prímszámok, és pontosan akkor fusson él két különböző, u és v csúcs között, ha $u-v$ osztható öttel, vagy $u+v$ kétjegyű prímszám.

a) Rajzoljuk föl G-t.

b) Rajzoljuk föl a G 2-komponenseiből és elvágó éleiből álló erdőt. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-élösszefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.

c) Rajzoljuk föl a $T_2(G)$ gráfot. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-összefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.

2. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Hogyan függ a G 2-komponenseinek számától azon élek minimális száma, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik?

Megoldás: A feladatbeli feltétel azt jelenti, hogy a szóban forgó 2-komponensen kívül G minden más 2-komponense levélkomponens, és G minden elvágó éle mentén egy-egy ilyen levélkomponens kapcsolódik a szóban forgó 2-komponenshez. Az órán tanult tétel szerint a 2-élöf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma $\left\lceil\frac{\ell(G)+2\ell'(G)}{2}\right\rceil$, és a mi esetünkben $\ell'(G)=0$, $\ell(G)$ pedig G elvágó éleinek száma, legalábbis akkor, ha a „központi” 2-komponens nem levélkomponens. Ennek megfelelően a formula nem más, mint $\left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil$, ahol ℓ a G elvágó éleinek száma. Ha pedig a központi 2-komponens is levélkomponens, akkor ebből is pontosan egy elvágó él indul ki, amikoris G-nek összesen egy elvágó éle, és 2 db levél 2-komponense van, ám a formula szerencsére ekkor is helyes, hiszen egy élre van szükség a 2-élöf tulajdonság eléréséhez, és a formula is ennyit ad.

Egyébként az órai tétel alkalmazása nélkül is látszik, hogy $\frac{\ell}{2}$ él behúzásával elérhető a 2-élöf tulajdonság. Ha ugyanis a levélkomponenseket összepárosítom és a párokat a egy-egy él mentén összekötjük, majd az esetlegesen kimaradó párosítatlan levélkomponenst (mondjuk) a központi komponenshez kötjük be, akkor épp $\left\lceil\frac{\ell}{2}\right\rceil$ élt használunk, amiknek a behúzása után nem marad elvágó él, tehát G-t csakugyan 2-élöf-vé tettük.

3. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik.

Megoldás: A szóban forgó maxblokkon kívül minden más maxblokk levél, és a behúzandó élek száma legalább a levélblokkok számának fele, azaz legalább $\left\lceil\frac{m(G)}{2}\right\rceil$. Azonban ugyanazon az elvágó ponton több levélblokk is kapcsolódhat, így figyelni kell arra is, hogy legalább $b(G)-1$ élre van szükség. Az eljárás ezért a következő. Ha a levélblokkok összepárosíthatók úgy, hogy minden pár két tagja különböző elvágó pontokhoz tartozzék (esetleg egy kimaradó maxblokk megengedésével, akkor a párok közé éleket behúzva, a kimaradó maxblokkot pedig tetszőleges másik maxblokkhoz hozzákötve (de nem az elvágó pontjából induló éllel) $\left\lceil\frac{m(G)}{2}\right\rceil$ élt használunk. Ez optimális megoldás.

Ha viszont nem lehet a levélblokkokat így párosítani, annak az oka, hogy $b(G)$ több mint fele a levélkomponensek számának. Ekkor a $b(G)-1$ db azonos elvágó pontra illeszkedő levélblokkból annyit, amennyit lehet más elvágó ponton ülő maxblokkal kötünk össze, a $b(G)$ maxblokkból ezek után megmaradó k maxblokkot pedig pedig úgy kötözgetem össze $k-1$ éllel, hogy az elvágó pont elhagyásával keletkező részeik összefüggő gráfot alkossanak. (Tkp egy egy fát építek az elvágó pont elhagyásával keletkező komponenseken.)

4. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.

Megoldás: A tanultak szerint szükséges élek min. száma $\max(b(G)-1, \left\lceil\frac{m(G)+2m'(G)}{2}\right\rceil)$. Mivel G öf, nincs izolált blokk ($m'(G)=0$); mivel 1-nél több elvágó pont van, ezért nem lehet minden maxblokk levélblokk, tehát $m(G)\leq 10$. Akkor kéne legalább 6 él, ha $b(G)\geq 7$ lenne. De ekkor a 7-es elvágó ponttól különböző minden elvágó pontot tartalmazza egy olyan maxblokk, ami az adott pont elhagyásakor a 7-es elvágó pontot nem tartalmazó komponensbe esik, és ezek a maxblokkok páronként különbözők. De ekkor legalább $7+5=12$ maxblokkja lenne G-nek, ami lehetetlen, kész vagyunk.

Megjegyzés: úgy is érvelhetünk $b(G) \leq 6$ alátámasztására, hogy vesszük az elvágó pontokon és a maxblokkokon definiált $T_2(G)$ gráfot, mely jelen esetben fa (általában is erdő). Ennek 17 csúcsa van, így élszáma 16. Minden elvágó pont foka $T_2(G)$-ben legalább 2, és $T_2(G)$ élszámát megkapjuk úgy, ha összeadjuk az elvágó pontok fokszámait (mivel minden él egy elvágó pontot és egy maxblokkot köt össze, így mindegyik élt pontosan egyszer számoljuk). Ha $b(G) \geq 7$ lenne, akkor a megfelelő elvágó pont foka legalább 7 volna, a többié legalább 2, így az elvágó pontok fokszámainak összege legalább $7+5\cdot 2=17$ lenne, de az előbbiek alapján 16 kéne legyen.

5. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy legalább 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.

Megoldás: Az előadáshoz tartozó diasoron van egy konkrét példa.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G=(V,E)$ gráfban találhatók olyan (u_1,w_1) és (u_2,w_2) pontpárok, amikre $w_1 \neq w_2$, valamint $\lambda(u_1,w_1)=d(w_1)$ és $\lambda(u_2,w_2)=d(w_2)$ teljesül.

Megoldás: Az órán azt tanították, hogy a maxvissza sorrend utolsó két pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azaz ha $v_1,v_2,\dots,v_n$ egy maxvissza sorrend, akkor $u_1=v_{n-1}, w_1=v_n$ jó választás. Csupán egy másik hasonló tulajdonságú (u_2,w_2) párt kell találni úgy, hogy w_2 különbözzék w_1-től. Ehhez elegendő egy másik maxvissza sorrendet találni, aminél garantálni tudjuk, hogy az utolsó csúcs nem w_1 lesz.
Azért annyira ez se bonyolult: készítsünk úgy egy másik maxvissza sorrendet, hogy w_1 az első csúcs ebben a másik sorrendben. Az utolsó csúcs így garantáltan nem w_1 lesz, tehát az így kapott maxvissza sorrend utolsó két csúcsa megfelel u_2-nek és w_2-nek.

7. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: 7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?

Megoldás: Az órán tanultak szerint $\lambda(G)$ megegyezik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus során a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcsok fokszámai közül a legkisebbikkel. Ez a konkrét esetben $\lambda(G)=4$-nek adódik.
Olyat is tanítottak, hogy $\lambda(v_{n-1},v_n)=d(v_n)$, azaz a maxvissza sorrend utolsó két pontját elválasztó vágások között minimális számú élt tartalmaz az a vágás, amelynek egyik oldalán a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcs áll. Mivel minden egyes maxvisszasorrend-számítás után a sorrend két utolsó pontját összeragasztjuk, ezért amikorra a negyedik maxvissza sorrendben az utolsó csúcs foka 4 lett, addig összesen 3 összeragasztást hajtottunk végre. Ezért a negyedik maxvissza sorrend utolsó csúcsa által reprezentált X ponthalmaz G-nek legfeljebb 4 pontját tartalmazhatja.
Mivel ez az X a G egy minimális vágását határozza meg, ezért a második kérdésre igenlő a válasz: van olyan legfeljebb 4 elemű ponthalmaza G-nek, ami G minimális vágását indukálja.

8. Igazoljuk Robbins tételét: egy G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő. (Egy D irányított gráf akkor erősen összefüggő, ha bármely u,v csúcsra létezik D-ben irányított uv-út.)

Megoldás: Tegyük föl először, hogy G nem kétszeresen élösszefüggő. Ekkor vagy egyáltalán nem összefüggő, és akkor nyilván nincs erősen összefüggő irányítása; vagy összefüggő, de van olyan uv éle, melyet elhagyva két komponens keletkezik, A és B, mondjuk $u \in A$, $v \in B$ (tehát A és B között az egyetlen él az uv). Vegyünk az élek egy tetszőleges megirányítását. Ha az uv él uv irányítással szerepel, akkor v-ből u-ba nem tudunk eljutni; ha vu irányítással szerepel, akkor meg u-ból v-be. Tehát ha G nem kétszeresen élösszefüggő, akkor nem irányítható erősen összefüggővé.
Másodszor tegyük föl, hogy a gráf kétszeresen élösszefüggő. Ekkor van fülfelbontása. Állítsuk hát elő G-t fülek egymás utáni fölragasztásával. Minden lépésben az új fül éleit irányítsuk a fül mentén ugyanazon irányba (mindegy, hogy a kettő lehetőség közül melyikbe). Az első fülnél így egy körbeirányított kört kapunk, ami persze erősen összefüggő. Könnyű ellenőrizni, hogy ha a már felépített gráf irányítása erősen összefüggő, akkor egy új fület hozzávéve és a leírt módon megirányítva újra erősen összefüggő gráfot kapunk, így a folyamat végén a G-nek egy erősen összefüggő irányítását kapjuk. Tehát ha G kétszeresen összefüggő, akkor van erősen öf irányítása.

9. Igazoljuk, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.

Megoldás: Bármilyen fület is ragasztunk egy gráfra, ennek nyomán az újonnan bevett csúcsai számánál eggyel több új él keletkezik. Mivel a kiindulási gráfnak 1 csúcsa és 0 éle volt, és minden fül 1-gyel növelte az élszám és csúcsszám különbségét, ezért ha G-nek van fülfelbontása, abban pontosan $|E(G)|-|V(G)|+1$ fülnek kell szerepelnie, bármelyik fülfelbontást is tekintjük.

10. Tegyük fel, hogy a G gráf 2-élöf és nincs 2-fokú csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy van G-nek olyan e éle, amire a $G-e$ gráf is 2-élöf. Igaz-e hasonló állítás a 2-élöf helyett 2-öf tulajdonsággal?

Megoldás: Mindkét állítás igaz. Tekintsük G egy fülfelbontását, és nézzük az utolsó fület. Ez vagy a keresett e él, vagy tartalmaz 2-fokú pontot. Mivel az utóbbi lehetetlen, az utolsó fül egy él. Ezt elhagyva a gráfból a fülfelbontásunk megmarad (csak eggyel kevesebb füllel), tehát az eredmény is 2-(él)öf.

11. Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M-beli él.

12. Adjunk meg olyan eljárást, ami tetszőleges irányítatlan G input gráf esetén meghatározza a legkisebb olyan k pozitív egész számot, amire hozzáadható G-hez k él úgy, hogy a kapott gráf 2-szeresen élösszefüggő legyen, és a hozzáadott élek utat alkossanak.

Megoldás: Ha G minden 2-komponense izolált, akkor ha G összefüggő, akkor 0 a válasz. Ha G nem összefüggő, és minden 2-komponense 1-pontú, akkor G-nek nincs éle, ezért bárhogyan is adunk hozzá egy utat, nem lesz 2-élösszefüggő.
Minden egyéb esetben vagy van G-nek olyan izolált 2-komponense, ami legalább 2 csúcsot tartalmaz, vagy van G-nek két olyan levél 2-komponense, amik ugyanahhoz a komponenshez tartoznak.
Úgy adunk hozzá egy utat G-hez, hogy az minden izolált és levél 2-komponenst érintsen, továbbá, ha van egy legalább kétcsúcsú izolált 2-komponens, akkor annak egyik csúcsából induljon és egy másikba érkezzen, ill. ha ilyen nincs, akkor egy levélkomponensből induljon, és ugyanezen komponens egy másik levélkomponensébe érkezzen az út. Egy így konstruált út hozzáadása nyomán egyetlen elvágó él sem marad a kapott gráfban, továbbá az ilyen út $\ell(G)+\ell'(G)-1$ élt tartalmaz. Mivel minden izolált és levél 2-komponenst érintenie kell a hozzáadott éleknek, ezért ennél kevesebb élű úttal nem lehet megoldani a feladatot, ez tehát a keresett minimum.

13. Igazoljuk, hogy minden erősen összefüggő G gráf előállítható egy irányított körből kiindulva irányított fülek egymás utáni hozzávételével.

Megoldás: Az órai bizonyítás irányított esetben is elmondható a következő módon. Tetsz. uv él esetén uv egy vu-úttal irányított kört alkot, kiindulásnak épp jó. Ha a félkész gráfról lelóg egy él, akkor a megkonstruálatlan csúcsból/csúcsba van irányított út a már megkonstruált csúcsokba/csúcsokból. Ez az út a lelógó éllel együtt egy irányított fület alkot. Ha már G minden csúcsát megkonstruáltuk, akkor a hiányzó élek fülekként hozzávehetők.

14. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben az első fül egy C_3, minden további fül pedig 2 élt tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére úgy, hogy egyetlen él kap fehér színt, továbbá a piros élek a fehér éllel együtt a G egy feszítőfáját alkossák, valamint a zöld élek a fehér éllel együtt szintén a G egy feszítőfáját alkossák.

Megoldás: A C_3 éleit nemzeti színűre színezzük. Minden további fül egyik élét pirosra, a másikat zöldre festjük. Így minden félkész gráfnak (és a végén a késznek is) lesz egy fehér éle, ami akár a pirosakkaL, akár a zöldekkel együtt feszítőfát alkot.